Aufgabe 1

(a) $y''' + 4y' = 2y$

gewöhnlich, linear, homogen, konstante Koeffizienten, 3. Ordnung

(b) $y^{(5)} = x^2 y''' - \frac{1}{y} + \sin(x)$

gewöhnlich, explizit, 5. Ordnung

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

partiell

(d) $y''(x) + \frac{y'}{x^2} = \ln(x)$

gewöhnlich, linear, inhomogen, 2. Ordnung

Aufgabe 2

$y(x) = x^2 + x + a \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad y''(x) = 2$

$0 = y''(y')^2 - 8y$
$0 = 2(2x+1)^2 - 8(x^2 + x + a)$
$0 = 2(4x^2 + 4x + 1) - 8x^2 - 8x - 8a$
$0 = 8x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x - 8a$
$0 = 2 - 8a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$

Aufgabe 3

A $\rightarrow$ 5, B $\rightarrow$ 8, C $\rightarrow$ 2, D $\rightarrow$ 6, E $\rightarrow$ 3, F $\rightarrow$ 4

Aufgabe 4

(a) $y(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$

(b) $y(x) = (1 + 4x)e^{-2x}$

(c) $y(x) = \cos(4x) + \sin(4x)$

Aufgabe 5

(a) $y' + xy = 0$ homogene lineare DGL 1. Ordnung mit $u(x) = x$

$U(x) = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$

$y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$

AWP: $y(0) = C_2\mathrm{e}^0 = C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$

(b) $y' + 2y = \mathrm{e}^{-x} \qquad (y(0) = 4)$

$y' + u(x)y = v(x)$ mit $u(x) = 2$ und $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(\mathrm{e}^x + C\big)\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-2x}$$

Lösung des AWPs:

$y(0) = \mathrm{e}^0 + C \cdot \mathrm{e}^0 = 1 + C = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 3$

$y(x) = \mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-2x}$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^{x-y} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \\
\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y &= \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{e}^y &= \mathrm{e}^x + C \\
y &= \ln(\mathrm{e}^x + C)
\end{aligned}$$

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$:

$2 = \ln(\mathrm{e} + C) \Rightarrow \mathrm{e}^2 = \mathrm{e} + C \Rightarrow C = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$

$y = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e})$

Aufgabe 8

$$
\begin{aligned}
y' &= y^2 x + y^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^2(x+1) \\
\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= (x+1)\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int (x+1)\,\mathrm{d}x \\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}x^2 + x + C \\
\frac{1}{y} &= -\frac{1}{2}x^2 - x - C \\
y &= \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x + C}
\end{aligned}
$$

AWP: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$$1 = \frac{-1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x - 1} = \frac{2}{2 - 2x - x^2}$$