

Differenzialgleichungen (5)

Übungen

Aufgabe 5.1

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' - 6y' + 9y = 0$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = -1$.

Aufgabe 5.1

$$\text{DGL: } y'' - 6y' + 9y = 0$$

Aufgabe 5.1

$$\text{DGL: } y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

Aufgabe 5.1

$$\text{DGL: } y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

Aufgabe 5.1

$$\text{DGL: } y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{3x} + 3(C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

Aufgabe 5.1

$$\text{DGL: } y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{3x} + 3(C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 2 \\ y'(0) = C_2 + 3C_1 = -1 \end{array} \right\} C_1 = 2, C_2 = -7$$

Aufgabe 5.1

$$\text{DGL: } y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{3x} + 3(C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 2 \\ y'(0) = C_2 + 3C_1 = -1 \end{array} \right\} C_1 = 2, C_2 = -7$$

$$y(x) = (2 - 7x)e^{3x}$$

Aufgabe 5.2

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 5$.

Aufgabe 5.2

$$\text{DGL: } y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$$

Aufgabe 5.2

$$\text{DGL: } y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$$

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$(2\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 5.2

$$\text{DGL: } y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$$

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$(2\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

Aufgabe 5.2

$$\text{DGL: } y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$$

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$(2\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}C_1 e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

Aufgabe 5.2

$$\text{DGL: } y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$$

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$(2\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}C_1 e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 6, C_2 = -6$$

Aufgabe 5.2

$$\text{DGL: } y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$$

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$(2\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}C_1 e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 6, C_2 = -6$$

$$y(x) = 6e^{\frac{1}{2}x} - 6e^{-\frac{1}{3}x}$$

Aufgabe 5.3

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' + 2y' + 10y = 0$ mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = 0$.

Aufgabe 5.3

$$\text{DGL: } y'' + 2y' + 10y = 0$$

Aufgabe 5.3

$$\text{DGL: } y'' + 2y' + 10y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 = (6i)^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$\lambda_2 = \dots = -1 - 3i$$

Aufgabe 5.3

$$\text{DGL: } y'' + 2y' + 10y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 = (6i)^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$\lambda_2 = \dots = -1 - 3i$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

Aufgabe 5.3

$$\text{DGL: } y'' + 2y' + 10y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 = (6i)^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$\lambda_2 = \dots = -1 - 3i$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

$$y'(x) = -e^{-x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) + e^{-x} (3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x)$$

Aufgabe 5.3

$$\text{DGL: } y'' + 2y' + 10y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 = (6i)^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$\lambda_2 = \dots = -1 - 3i$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

$$y'(x) = -e^{-x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) + e^{-x} (3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_2 = 6 \\ y'(0) = -C_2 + 3C_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 6$$

Aufgabe 5.3

$$\text{DGL: } y'' + 2y' + 10y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 = (6i)^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$\lambda_2 = \dots = -1 - 3i$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

$$y'(x) = -e^{-x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) + e^{-x} (3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_2 = 6 \\ y'(0) = -C_2 + 3C_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 6$$

$$y(x) = e^{-x} (2 \sin 3x + 6 \cos 3x)$$

Aufgabe 5.4

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' + 2y' = 0$ mit $y(0) = 3$ und $y'(0) = 2$.

Aufgabe 5.4

$$\text{DGL: } y'' + 2y' = 0$$

Aufgabe 5.4

$$\text{DGL: } y'' + 2y' = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

Aufgabe 5.4

$$\text{DGL: } y'' + 2y' = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$y(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

Aufgabe 5.4

$$\text{DGL: } y'' + 2y' = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$y(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x}$$

Aufgabe 5.4

$$\text{DGL: } y'' + 2y' = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$y(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = -2C_2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = -1$$

Aufgabe 5.4

$$\text{DGL: } y'' + 2y' = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$y(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = -2C_2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = -1$$

$$y(x) = 4 - e^{-2x}$$

Aufgabe 5.5

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' + 16y = 0$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = -4$.

Aufgabe 5.5

$$\text{DGL: } y'' + 16y = 0$$

Aufgabe 5.5

$$\text{DGL: } y'' + 16y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 = -16 = (3i)^2$$

$$\lambda_1 = 0 + 4i$$

$$\lambda_2 = 0 - 4i$$

Aufgabe 5.5

$$\text{DGL: } y'' + 16y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 = -16 = (3i)^2$$

$$\lambda_1 = 0 + 4i$$

$$\lambda_2 = 0 - 4i$$

$$y(x) = e^0(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$$

Aufgabe 5.5

$$\text{DGL: } y'' + 16y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 = -16 = (3i)^2$$

$$\lambda_1 = 0 + 4i$$

$$\lambda_2 = 0 - 4i$$

$$y(x) = e^0(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$$

$$y'(x) = 4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x$$

Aufgabe 5.5

$$\text{DGL: } y'' + 16y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 = -16 = (3i)^2$$

$$\lambda_1 = 0 + 4i$$

$$\lambda_2 = 0 - 4i$$

$$y(x) = e^0(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$$

$$y'(x) = 4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_2 = 2 \\ y'(0) = 4C_1 = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 2$$

Aufgabe 5.5

$$\text{DGL: } y'' + 16y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 = -16 = (3i)^2$$

$$\lambda_1 = 0 + 4i$$

$$\lambda_2 = 0 - 4i$$

$$y(x) = e^0(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$$

$$y'(x) = 4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_2 = 2 \\ y'(0) = 4C_1 = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 2$$

$$y(x) = 2 \cos 4x - \sin 4x$$

Aufgabe 5.6

Stelle den trigonometrischen Term $2 \sin \omega t + 3 \cos \omega t$ in der Form

(a) $A \sin(\omega t + \gamma),$

(b) $A \cos(\omega t + \delta)$

dar. Die Winkel sind jeweils im Bogenmass anzugeben.

Aufgabe 5.6

$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

Aufgabe 5.6

$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

$$C = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Aufgabe 5.6

$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

$$C = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad C \sin(\omega t + \gamma) &= C \sin(\omega t) \cos \gamma + C \cos(\omega t) \sin \gamma \\ &= 2 \sin(\omega t) + 3 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.6

$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

$$C = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad C \sin(\omega t + \gamma) &= C \sin(\omega t) \cos \gamma + C \cos(\omega t) \sin \gamma \\ &= 2 \sin(\omega t) + 3 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 2 = C \cos \gamma$$

$$3 = C \sin \gamma$$

Aufgabe 5.6

$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

$$C = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad C \sin(\omega t + \gamma) &= C \sin(\omega t) \cos \gamma + C \cos(\omega t) \sin \gamma \\ &= 2 \sin(\omega t) + 3 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 2 = C \cos \gamma$$

$$3 = C \sin \gamma$$

$$(x, y) = (2, 3) \text{ im 1. Quadranten (ok)}$$

Aufgabe 5.6

$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

$$C = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad C \sin(\omega t + \gamma) &= C \sin(\omega t) \cos \gamma + C \cos(\omega t) \sin \gamma \\ &= 2 \sin(\omega t) + 3 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 2 = C \cos \gamma$$

$$3 = C \sin \gamma$$

$(x, y) = (2, 3)$ im 1. Quadranten (ok)

$$\frac{3}{2} = \frac{C \sin \gamma}{C \cos \gamma} = \tan \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arctan \frac{3}{2} = 0.983$$

Aufgabe 5.6

$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

$$C = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad C \sin(\omega t + \gamma) &= C \sin(\omega t) \cos \gamma + C \cos(\omega t) \sin \gamma \\ &= 2 \sin(\omega t) + 3 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 2 = C \cos \gamma$$

$$3 = C \sin \gamma$$

$(x, y) = (2, 3)$ im 1. Quadranten (ok)

$$\frac{3}{2} = \frac{C \sin \gamma}{C \cos \gamma} = \tan \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arctan \frac{3}{2} = 0.983$$

$$y(t) = \sqrt{13} \sin(\omega t + 0.983)$$

(b) $(C_1, -C_2) = (3, -2)$ im 4. Quadranten

(b) $(C_1, -C_2) = (3, -2)$ im 4. Quadranten

$$\delta = \arctan \frac{-C_2}{C_1} = \arctan \frac{-2}{3} = -0.588$$

(b) $(C_1, -C_2) = (3, -2)$ im 4. Quadranten

$$\delta = \arctan \frac{-C_2}{C_1} = \arctan \frac{-2}{3} = -0.588$$

$$y(t) = \sqrt{13} \cos(\omega t - 0.588)$$

Aufgabe 5.7

Zeige, dass die Funktionen $y_1(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$ und $y_2(x) = C_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$ jeweils die DGL $ay'' + by' + cy = 0$ lösen, wenn die Koeffizienten die Bedingung $b^2 - 4ac = 0$ erfüllen.

Aufgabe 5.7

$$y_1 = C_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_1' = -\frac{b}{2a} C_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_1'' = \frac{b^2}{4a^2} C_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= \left(a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} + c \right) C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \left(\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \right) C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.7

$$y_2 = C_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_2' = C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a} x C_2 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_2'' = \dots = -\frac{b}{a} C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2} x C_2 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= \left(-b + \frac{b^2}{4a}x + b - \frac{b^2}{2a}x + cx \right) C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \frac{b^2x - 2b^2x + 4acx}{4a} C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \frac{-(b^2 - 4ac)x}{4a} C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.8

Wie lautet die Lösung der Differenzialgleichung der erzwungenen *ungedämpften* Schwingung für $\omega_0 \neq \omega_1$.

Aufgabe 5.8

Setze in der Lösungsfunktion der erzwungenen gedämpften Schwingung (Formelsammlung S. 82) $\delta = 0$ ein:

Aufgabe 5.8

Setze in der Lösungsfunktion der erzwungenen gedämpften Schwingung (Formelsammlung S. 82) $\delta = 0$ ein:

$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t)$$

Aufgabe 5.8

Setze in der Lösungsfunktion der erzwungenen gedämpften Schwingung (Formelsammlung S. 82) $\delta = 0$ ein:

$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t)$$

$y_h(t)$ ist eine allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

Aufgabe 5.8

Setze in der Lösungsfunktion der erzwungenen gedämpften Schwingung (Formelsammlung S. 82) $\delta = 0$ ein:

$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t)$$

$y_h(t)$ ist eine allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

Mit $\delta = 0$ folgt aus $\tan \gamma = \frac{2\delta\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_0^2} = 0$ auch $\gamma = 0$

Aufgabe 5.9

Zeige, dass $y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$ eine partikuläre Lösung der DGL der erzwungenen ungedämpften Schwingung für $\omega_0 = \omega_1$ ist.

Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$$

Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{A}{2} t \cdot \cos \omega_0 t$$

Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{A}{2} t \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t$$

Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{A}{2} t \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$\ddot{y}(t)$ und $y(t)$ in die DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ einsetzen:

Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{A}{2} t \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$\ddot{y}(t)$ und $y(t)$ in die DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ einsetzen:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y$$

Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{A}{2} t \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$\ddot{y}(t)$ und $y(t)$ in die DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ einsetzen:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = A \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \cdot \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t$$

Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{A}{2} t \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$\ddot{y}(t)$ und $y(t)$ in die DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ einsetzen:

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \omega_0^2 y &= A \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t + \omega^2 \cdot \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t \\ &= A \cos \omega_0 t\end{aligned}$$

Aufgabe 5.10

Bestimme die Lösung der Gleichung $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 + 5x + 3$ mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Verwende dazu den Ansatz $y(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Aufgabe 5.10

- Lösung der homogenen DGL $y'' - 4y' + 3y = 0$

Aufgabe 5.10

- Lösung der homogenen DGL $y'' - 4y' + 3y = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

Aufgabe 5.10

- Lösung der homogenen DGL $y'' - 4y' + 3y = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

- ▶ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

- ▶ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y_i(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_i'(x) = 2Ax + B$$

$$y_i''(x) = 2A$$

- ▶ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y_i(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_i'(x) = 2Ax + B$$

$$y_i''(x) = 2A$$

einsetzen:

- partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y_i(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_i'(x) = 2Ax + B$$

$$y_i''(x) = 2A$$

einsetzen:

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 + 5x + 3$$

$$3Ax^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) = 6x^2 + 5x + 3$$

► partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y_i(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_i'(x) = 2Ax + B$$

$$y_i''(x) = 2A$$

einsetzen:

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 + 5x + 3$$

$$3Ax^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) = 6x^2 + 5x + 3$$

Koeffizientenvergleich:

► partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y_i(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_i'(x) = 2Ax + B$$

$$y_i''(x) = 2A$$

einsetzen:

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 + 5x + 3$$

$$3Ax^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) = 6x^2 + 5x + 3$$

Koeffizientenvergleich:

$$3A = 6 \qquad A = 2$$

$$-8A + 3B = 5 \quad \Rightarrow \quad B = 7$$

$$2A - 4B + 3C = 3 \qquad C = 9$$

► partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y_i(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_i'(x) = 2Ax + B$$

$$y_i''(x) = 2A$$

einsetzen:

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 + 5x + 3$$

$$3Ax^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) = 6x^2 + 5x + 3$$

Koeffizientenvergleich:

$$3A = 6 \quad A = 2$$

$$-8A + 3B = 5 \quad \Rightarrow \quad B = 7$$

$$2A - 4B + 3C = 3 \quad C = 9$$

$$y_i(x) = 2x^2 + 7x + 9$$

► allgemeine Lösung:

► allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 2x^2 + 7x + 9$$

Aufgabe 5.11

Beschreibe qualitativ und vollständig den zur DGL gehörenden Typ der Schwingung.

(a) $\ddot{y} + 4y = 0$

(b) $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$

(c) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 5 \cos(5t)$

Aufgabe 5.11

- (a) $\ddot{y} + 4y = 0$: freie ungedämpfte Schwingung
- (b) $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$: freie gedämpfte Schwingung
- (c) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 5 \cos(5t)$: erzwungene gedämpfte Schwingung

Aufgabe 5.12

eine Kraft von 0.5 N verlängere die Feder eines ungedämpften harmonischen Oszillators um 10 cm. An der entspannten Feder werde nun eine Masse von 250 Gramm befestigt, die Feder werde um 5 cm ausgedehnt und dann losgelassen.

- (a) Wie gross ist die Federkonstante?
- (b) Berechne die Kreisfrequenz, die Frequenz und die Schwingungsdauer des Oszillators.
- (c) Bestimme sein Zeit-Weg-Gesetz $y(t)$.

Aufgabe 5.12

$$\Delta F = 0.5 \text{ N}$$

$$\Delta y = 0.1 \text{ m}$$

$$m = 0.25 \text{ kg}$$

$$y(0) = 0.05 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = 0 \text{ m s}^{-1}$$

Aufgabe 5.12

$$\Delta F = 0.5 \text{ N}$$

$$\Delta y = 0.1 \text{ m}$$

$$m = 0.25 \text{ kg}$$

$$y(0) = 0.05 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = 0 \text{ m s}^{-1}$$

(a) $\Delta F = D \cdot \Delta y$

$$D = \frac{\Delta F}{\Delta y} = \frac{0.5 \text{ N}}{0.1 \text{ m}} = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

(b) DGL: $m\ddot{y} + Dy = 0$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0 \quad (\text{freie ungedämpfte Schwingung})$$

(b) DGL: $m\ddot{y} + Dy = 0$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0 \quad (\text{freie ungedämpfte Schwingung})$$

Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{5 \text{ Nm}^{-1}}{0.25 \text{ kg}}} \approx 4.472 \text{ rad s}^{-1}$

(b) DGL: $m\ddot{y} + Dy = 0$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0 \quad (\text{freie ungedämpfte Schwingung})$$

Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{5 \text{ Nm}^{-1}}{0.25 \text{ kg}}} \approx 4.472 \text{ rad s}^{-1}$

Frequenz: $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.712 \text{ s}^{-1}$

(b) DGL: $m\ddot{y} + Dy = 0$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0 \quad (\text{freie ungedämpfte Schwingung})$$

Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{5 \text{ Nm}^{-1}}{0.25 \text{ kg}}} \approx 4.472 \text{ rad s}^{-1}$

Frequenz: $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.712 \text{ s}^{-1}$

Schwingungsdauer: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \nu^{-1} \approx 1.405 \text{ s}$

(c) Anfangswertproblem: $y(0) = 0.05 \text{ m}$, $\dot{y}(0) = 0$

(c) Anfangswertproblem: $y(0) = 0.05 \text{ m}$, $\dot{y}(0) = 0$

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

(c) Anfangswertproblem: $y(0) = 0.05 \text{ m}$, $\dot{y}(0) = 0$

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$y(0) = C_1 = 0.05 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = C_2 = 0 \text{ m}$$

(c) Anfangswertproblem: $y(0) = 0.05 \text{ m}$, $\dot{y}(0) = 0$

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$y(0) = C_1 = 0.05 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = C_2 = 0 \text{ m}$$

$$y(t) = 0.05 \cos(4.472t) \text{ m}$$

Aufgabe 5.13

Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator mit der Masse 2 kg habe eine Schwingungsdauer von 3 s. Berechne die Federkonstante.

Aufgabe 5.13

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{D}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2}{9} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} = 8.773 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Aufgabe 5.14

Eine Kraft von $6 \cdot 10^{-4}$ N strecke eine Feder um 3 cm. An die (entspannte) Feder werde eine Stahlkugel mit einer Masse von 2 Gramm gehängt. Nach Erreichen der statischen Ruhelage werde die Kugel 4 cm über diese Ruhelage gehoben und dann losgelassen.

- (a) Bestimme die Amplitude und die Frequenz der Schwingung.
- (b) Gib das Weg-Zeit-Gesetz an.
- (c) Zu welchen Zeiten ist die Kugel 2 cm über der statischen Ruhelage und wie gross ist dort ihre Geschwindigkeit?

Hinweis: Grundsätzlich müsste man unter dem Einfluss der Schwerkraft im reibungsfreien Fall die DGL $\ddot{y} + \frac{D}{m}y = g$ lösen. Mit der Transformation $y = u + \frac{mg}{D}$ erhält man $\ddot{u} + \frac{D}{m}(u + \frac{mg}{D}) = g$ bzw. $\ddot{u} + \frac{D}{m}u = 0$. Wählt man also die statische Ruhelage als Nullpunkt, verschwindet die Schwerkraft aus der Rechnung.

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04 \text{ m}$

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04 \text{ m}$

$$\text{Federkonstante: } D = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04 \text{ m}$

$$\text{Federkonstante: } D = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.002}} \text{ s}^{-1} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1} \approx 3.162 \text{ s}^{-1}$$

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04 \text{ m}$

$$\text{Federkonstante: } D = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.002}} \text{ s}^{-1} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1} \approx 3.162 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz: } \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.5033 \text{ s}^{-1}$$

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04 \text{ m}$

$$\text{Federkonstante: } D = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.002}} \text{ s}^{-1} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1} \approx 3.162 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz: } \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.5033 \text{ s}^{-1}$$

(b) $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04 \text{ m}$

$$\text{Federkonstante: } D = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.002}} \text{ s}^{-1} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1} \approx 3.162 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz: } \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.5033 \text{ s}^{-1}$$

(b) $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04 \text{ m}$

$$\text{Federkonstante: } D = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.002}} \text{ s}^{-1} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1} \approx 3.162 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz: } \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.5033 \text{ s}^{-1}$$

(b) $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

$$y(t) = -0.04 \cos \omega_0 t$$

für Teil (c):

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04 \text{ m}$

$$\text{Federkonstante: } D = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.002}} \text{ s}^{-1} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1} \approx 3.162 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz: } \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.5033 \text{ s}^{-1}$$

(b) $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

$$y(t) = -0.04 \cos \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} \text{für Teil (c): } \dot{y}(t) &= 0.04 \sqrt{10} \cos(\sqrt{10} t) \text{ m s}^{-1} \\ &= \sqrt{2} \cos(\sqrt{10} t) \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

(c) $-0.02 = -0.04 \cos(\sqrt{10}t)$

$$\cos(\sqrt{10}t) = 0.5$$

(c) $-0.02 = -0.04 \cos(\sqrt{10}t)$

$$\cos(\sqrt{10}t) = 0.5$$

1. Lösung:

$$(c) \quad -0.02 = -0.04 \cos(\sqrt{10}t)$$

$$\cos(\sqrt{10}t) = 0.5$$

1. Lösung:

$$\sqrt{10}t = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3}$$

$$t_{1,k} = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3\sqrt{10}} \text{ s}$$

$$(c) \quad -0.02 = -0.04 \cos(\sqrt{10}t)$$

$$\cos(\sqrt{10}t) = 0.5$$

1. Lösung:

$$\sqrt{10}t = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3}$$

$$t_{1,k} = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3\sqrt{10}} \text{ s}$$

2. Lösung:

$$(c) \quad -0.02 = -0.04 \cos(\sqrt{10}t)$$

$$\cos(\sqrt{10}t) = 0.5$$

1. Lösung:

$$\sqrt{10}t = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3}$$

$$t_{1,k} = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3\sqrt{10}} \text{ s}$$

2. Lösung:

$$\sqrt{10}t = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi + k \cdot 6\pi}{3}$$

$$t_{2,k} = \frac{5\pi + k \cdot 6\pi}{3\sqrt{10}} \text{ s}$$

Aufgabe 5.15

Eine Masse von 100 g dehnt eine Feder um 5 cm. Die Masse wird aus ihrer Gleichgewichtslage mit einer Geschwindigkeit von $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ nach unten in Bewegung gesetzt. Der Luftwiderstand kann dabei vernachlässigt werden.

- (a) Bestime die Position $y(t)$ der Masse zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$.
- (b) Wann durchläuft die Masse zum ersten Mal ihre Gleichgewichtslage?

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y}$$

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}}$$

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 19.62 \text{ Nm}^{-1}$$

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 19.62 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow$$

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 19.62 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{19.62 \text{ N m}^{-1}}{0.1 \text{ kg}}}$$

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 19.62 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{19.62 \text{ N m}^{-1}}{0.1 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = 0 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{0.1 \text{ m s}^{-1}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.00714 \text{ m}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = 0 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{0.1 \text{ m s}^{-1}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.00714 \text{ m}$$

$$(a) \quad y(t) = 0.00714 \text{ m} \cdot \sin(14 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = 0 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{0.1 \text{ m s}^{-1}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.00714 \text{ m}$$

$$(a) \quad y(t) = 0.00714 \text{ m} \cdot \sin(14 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$(b) \quad \hat{y} \sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = 0 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{0.1 \text{ m s}^{-1}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.00714 \text{ m}$$

$$(a) \quad y(t) = 0.00714 \text{ m} \cdot \sin(14 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$(b) \quad \hat{y} \sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = 0 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{0.1 \text{ m s}^{-1}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.00714 \text{ m}$$

$$(a) \quad y(t) = 0.00714 \text{ m} \cdot \sin(14 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$(b) \quad \hat{y} \sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\omega_0 t = \pi$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = 0 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{0.1 \text{ m s}^{-1}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.00714 \text{ m}$$

$$(a) \quad y(t) = 0.00714 \text{ m} \cdot \sin(14 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$(b) \quad \hat{y} \sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\omega_0 t = \pi$$

$$t = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = 0 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{0.1 \text{ m s}^{-1}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.00714 \text{ m}$$

$$(a) \quad y(t) = 0.00714 \text{ m} \cdot \sin(14 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$(b) \quad \hat{y} \sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\omega_0 t = \pi$$

$$t = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$t = \frac{\pi \text{ rad}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.224 \text{ s}$$

Aufgabe 5.16

Eine Masse von 2 kg dehnt eine Feder um 4.9 cm. Die Masse wird um 3.3 cm angehoben und anschliessend mit einer Geschwindigkeit von 1 m s^{-1} nach unten in Bewegung gesetzt. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

- (a) Berechne den Ort der Masse zu einem bestimmten Zeitpunkt $t \geq 0$.
- (b) Bestimme die Kreisfrequenz, die Periode, die Amplitude und den Phasenwinkel der Bewegung.

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y}$$

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.049 \text{ m}}$$

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.049 \text{ m}} = 400.41 \text{ Nm}^{-1}$$

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.049 \text{ m}} = 400.41 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow$$

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.049 \text{ m}} = 400.41 \text{ N m}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{400.41 \text{ N m}^{-1}}{2 \text{ kg}}}$$

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.049 \text{ m}} = 400.41 \text{ N m}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{400.41 \text{ N m}^{-1}}{2 \text{ kg}}} = 14.15 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = -0.033 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1 \text{ ms}^{-1}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = -0.033 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1 \text{ ms}^{-1}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{(a) } y(t) &= -0.033 \text{ m} \cdot \cos(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ &\quad + 0.0707 \text{ m} \cdot \sin(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = -0.033 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1 \text{ ms}^{-1}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y(t) &= -0.033 \text{ m} \cdot \cos(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ &\quad + 0.0707 \text{ m} \cdot \sin(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad T = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \text{ rad}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.444 \text{ s}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = -0.033 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1 \text{ ms}^{-1}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y(t) &= -0.033 \text{ m} \cdot \cos(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ &\quad + 0.0707 \text{ m} \cdot \sin(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad T = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \text{ rad}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.444 \text{ s}$$

$$\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = -0.033 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1 \text{ ms}^{-1}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y(t) &= -0.033 \text{ m} \cdot \cos(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ &\quad + 0.0707 \text{ m} \cdot \sin(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad T = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \text{ rad}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.444 \text{ s}$$

$$\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = 0.0780 \text{ m}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = -0.033 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1 \text{ ms}^{-1}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y(t) &= -0.033 \text{ m} \cdot \cos(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ &\quad + 0.0707 \text{ m} \cdot \sin(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad T = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \text{ rad}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.444 \text{ s}$$

$$\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = 0.0780 \text{ m}$$

$$\varphi = \arctan \frac{C_2}{C_1} + \pi \quad \Rightarrow$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = -0.033 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1 \text{ ms}^{-1}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y(t) &= -0.033 \text{ m} \cdot \cos(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ &\quad + 0.0707 \text{ m} \cdot \sin(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad T = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \text{ rad}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.444 \text{ s}$$

$$\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = 0.0780 \text{ m}$$

$$\varphi = \arctan \frac{C_2}{C_1} + \pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2.01 \text{ rad}$$

Aufgabe 5.17

Eine Masse von 20 Gramm dehnt in der Ruhelage eine vertikale Feder um 5 cm. Die Masse wird dann noch weitere 2 cm nach unten gezogen und losgelassen. Die nun einsetzende Schwingung findet in einem Medium statt, dass der Bewegung eine Dämpfung von $0.4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ aufzwingt.

- (a) Berechne die Wegfunktion $y(t)$ in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ (bezogen auf die statische Ruhelage als Nullpunkt).
- (b) Nach wie vielen Sekunden ist die Elongation kleiner als 0.1 mm?

Aufgabe 5.17

$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0$ freie gedämpfte Schwingung

Aufgabe 5.17

$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0$ freie gedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y}$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}}$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Aufgabe 5.17

$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0$ freie gedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92 \text{ N m}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}}$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92 \text{ N m}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92 \text{ N m}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m}$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92 \text{ N m}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{0.4 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.02 \text{ kg}}$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92 \text{ N m}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{0.4 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.02 \text{ kg}} = 10 \text{ s}^{-1}$$

Aufgabe 5.17

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0 \quad \text{freie gedämpfte Schwingung}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92 \text{ Nm}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} \Rightarrow \delta = \frac{0.4 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.02 \text{ kg}} = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Aufgabe 5.17

$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0$ freie gedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92 \text{ N m}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} \Rightarrow \delta = \frac{0.4 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.02 \text{ kg}} = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \omega = 9.80 \text{ rad s}^{-1}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\dot{y}(t) = -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.02 \text{ m}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.02 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.02 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.0204 \text{ m}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.02 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.0204 \text{ m}$$

$$y(t) = e^{-10 \text{ s}^{-1} \cdot t} [0.02 \text{ m} \cdot \cos(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)]$$

AWP:

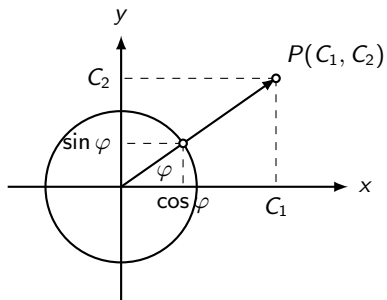
$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

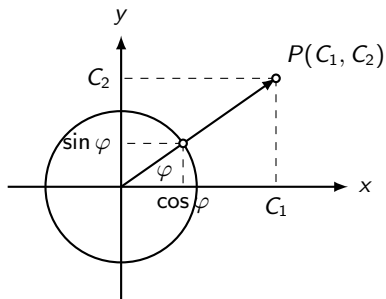
$$y(0) = C_1 = 0.02 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.0204 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} y(t) = & e^{-10 \text{ s}^{-1} \cdot t} [0.02 \text{ m} \cdot \cos(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ & + 0.0204 \text{ m} \cdot \sin(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)] \end{aligned}$$

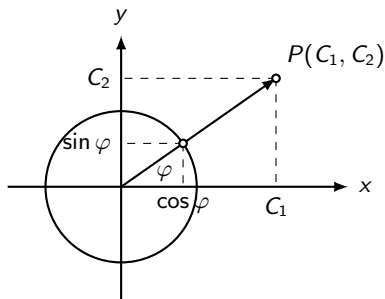


Amplitude: $\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0.0286 \text{ m}$



Amplitude: $\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0.0286 \text{ m}$

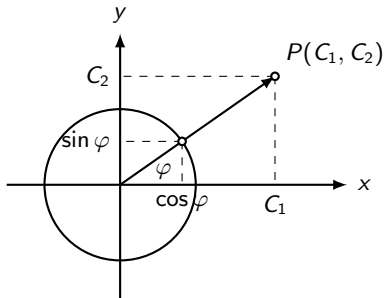
Phasenwinkel: $\varphi = \arg(P) = 0.795$ (noch nicht einsetzen!)



Amplitude: $\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0.0286 \text{ m}$

Phasenwinkel: $\varphi = \arg(P) = 0.795$ (noch nicht einsetzen!)

$$y(t) = 0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10 \text{ s}^{-1} \cdot t} [\cos 0.795 \cdot \cos(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)]$$



Amplitude: $\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0.0286 \text{ m}$

Phasenwinkel: $\varphi = \arg(P) = 0.795$ (noch nicht einsetzen!)

$$y(t) = 0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10 \text{ s}^{-1} \cdot t} \left[\cos 0.795 \cdot \cos(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) + \sin 0.795 \cdot \sin(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \right]$$

$$= 0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10 \text{ s}^{-1} \cdot t} \cos(9.8 \text{ rad s}^{-1} - 0.795)$$

(Phasenwinkel-Darstellung; Davon wird hier aber nur $\hat{y}$ benötigt.)

(b) $0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10t} = 0.0001 \text{ m}$

(b) $0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10t} = 0.0001 \text{ m}$

$$e^{-10t} = 0.350$$

$$(b) \quad 0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10t} = 0.0001 \text{ m}$$

$$e^{-10t} = 0.350$$

$$-10t = \ln(0.350)$$

$$(b) \quad 0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10t} = 0.0001 \text{ m}$$

$$e^{-10t} = 0.350$$

$$-10t = \ln(0.350)$$

$$t = 0.566 \text{ s}$$

Aufgabe 5.18

Eine Stahlkugel mit dem Radius $r = 1 \text{ cm}$ und der Dichte $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ wird an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 1.6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ aufgehängt. Die gesamte Vorrichtung befindet sich in einer Flüssigkeit mit der Viskosität $\eta = 1.48 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$.

- (a) Zeige, dass sich die Bewegung mit der folgenden DGL beschreiben lässt:

$$\ddot{y} + \frac{9\eta}{2r^2\rho}\dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3\rho}y = 0$$

Hinweis: Gesetz von Stokes

- (b) Die Kugel werde aus der statischen Ruhelage 4 cm nach unten gezogen und dann losgelassen. Bestimme das Weg-Zeit-Gesetz $y(t)$ und die Schwingungsdauer T .

Aufgabe 5.18

freie gedämpfte Schwingung: $m\ddot{y} + F_R + F_F = 0$

Für laminare Strömung um eine Kugel mit Radius r gilt (Stokes):

$$F_R = 6\pi\eta r v = 6\pi\eta r \dot{y}$$

zusammen mit $F_F = D y$ einsetzen:

$$m\ddot{y} + 6\pi\eta r \dot{y} + D y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{6\pi\eta r}{m} \dot{y} + \frac{D}{m} y = 0$$

Masse einer Kugel mit Dichte ϱ : $m = \varrho \cdot V = \varrho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3$

$$\ddot{y} + \frac{3 \cdot 6\pi\eta r}{4\pi r^3 \varrho} \dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3 \varrho} y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{9\eta}{2r^2 \varrho} \dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3 \varrho} y = 0 \quad (\text{ok})$$

$$2\delta = \frac{9\eta}{2r^2\varrho} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{9\eta}{4r^2\varrho} = 4.16 \text{ s}^{-1}$$

$$2\delta = \frac{9\eta}{2r^2\rho} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{9\eta}{4r^2\rho} = 4.16 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3D}{4\pi r^3\rho}} = 7.00 \text{ s}^{-1}$$

$$2\delta = \frac{9\eta}{2r^2\rho} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{9\eta}{4r^2\rho} = 4.16 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3D}{4\pi r^3\rho}} = 7.00 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 5.54 \text{ s}^{-1}$$

$$2\delta = \frac{9\eta}{2r^2\rho} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{9\eta}{4r^2\rho} = 4.16 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3D}{4\pi r^3\rho}} = 7.00 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 5.54 \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.13 \text{ s}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.04 \text{ m}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.04 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.04 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.0307 \text{ m}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ & + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.04 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.0307 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} y(t) = & e^{-4.16 \text{ s}^{-1} \cdot t} [0.04 \text{ m} \cdot \cos(5.54 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ & + 0.0307 \text{ m} \cdot \sin(5.54 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)] \end{aligned}$$

Aufgabe 5.19

Ein Kleinwagen hat eine Masse von 800 kg. Seine Stossdämpfer haben eine Dämpfung von $1500 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ bei einer Federkonstante mit dem Wert $16\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Das Auto wird durch einen Stoss aus seiner vertikalen Ruhelage bewegt. Berechne die Schwingungsdauer und den Faktor, mit dem die Schwingung abklingt.

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200 \text{ kg}$ dämpfen.

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200 \text{ kg}$ dämpfen.

Dämpfungskonstante: $k = 1500 \text{ N s m}^{-1}$

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200 \text{ kg}$ dämpfen.

Dämpfungskonstante: $k = 1500 \text{ N s m}^{-1}$

$$\delta = \frac{k}{2m} = 3.75 \text{ s}^{-1}$$

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200 \text{ kg}$ dämpfen.

Dämpfungskonstante: $k = 1500 \text{ N s m}^{-1}$

$$\delta = \frac{k}{2m} = 3.75 \text{ s}^{-1}$$

Federkonstante: $D = 16\,000 \text{ N m}^{-1}$

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200 \text{ kg}$ dämpfen.

Dämpfungskonstante: $k = 1500 \text{ N s m}^{-1}$

$$\delta = \frac{k}{2m} = 3.75 \text{ s}^{-1}$$

Federkonstante: $D = 16\,000 \text{ N m}^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 8.94 \text{ s}^{-1}$$

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200 \text{ kg}$ dämpfen.

Dämpfungskonstante: $k = 1500 \text{ N s m}^{-1}$

$$\delta = \frac{k}{2m} = 3.75 \text{ s}^{-1}$$

Federkonstante: $D = 16\,000 \text{ N m}^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 8.94 \text{ s}^{-1}$$

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 8.12 \text{ s}^{-1}$

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200 \text{ kg}$ dämpfen.

Dämpfungskonstante: $k = 1500 \text{ N s m}^{-1}$

$$\delta = \frac{k}{2m} = 3.75 \text{ s}^{-1}$$

Federkonstante: $D = 16\,000 \text{ N m}^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 8.94 \text{ s}^{-1}$$

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 8.12 \text{ s}^{-1}$

Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.774 \text{ s}$

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200 \text{ kg}$ dämpfen.

Dämpfungskonstante: $k = 1500 \text{ N s m}^{-1}$

$$\delta = \frac{k}{2m} = 3.75 \text{ s}^{-1}$$

Federkonstante: $D = 16\,000 \text{ N m}^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 8.94 \text{ s}^{-1}$$

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 8.12 \text{ s}^{-1}$

Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.774 \text{ s}$

Abklingfaktor: $e^{-3.75 \text{ s}^{-1} \cdot t} = 0.0235^t$

Aufgabe 5.20

Eine Masse mit einer Gewichtskraft von 39.2 N dehnt eine Feder um 4 cm . Die Bewegung der Masse wird durch eine Vorrichtung mit dem Faktor k gedämpft. Berechne den Wert von k , für den das System kritisch gedämpft ist.

Aufgabe 5.20

Wir erhalten kritische Dämpfung, wenn die charakteristische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $D = b^2 - 4ac = 0$ gilt.

Für die DGL in der physikfreundlichen Form

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

und die obige Bedingung somit

$$D = b^2 - 4ac = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = 0$$

Also muss bei kritischer Dämpfung $\delta = \omega_0$ gelten.

Das kann man natürlich auch direkt aus der Formelsammlung herauslesen.

$$\delta = \omega_0$$

$$\delta = \omega_0$$

$$\frac{k}{2m} = \omega_0$$

$$\delta = \omega_0$$

$$\frac{k}{2m} = \omega_0$$

$$k = 2m \cdot \omega_0$$

$$\delta = \omega_0$$

$$\frac{k}{2m} = \omega_0$$

$$k = 2m \cdot \omega_0$$

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{39.2 \text{ N}}{9.81 \text{ ms}^{-2}} = 4 \text{ kg}$$

$$\delta = \omega_0$$

$$\frac{k}{2m} = \omega_0$$

$$k = 2m \cdot \omega_0$$

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{39.2 \text{ N}}{9.81 \text{ ms}^{-2}} = 4 \text{ kg}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{F_G}{\Delta y \cdot m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\Delta y \cdot m}}$$

$$\delta = \omega_0$$

$$\frac{k}{2m} = \omega_0$$

$$k = 2m \cdot \omega_0$$

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{39.2 \text{ N}}{9.81 \text{ ms}^{-2}} = 4 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{F_G}{\Delta y \cdot m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\Delta y \cdot m}} \\ &= \sqrt{\frac{g}{\Delta y}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ ms}^{-2}}{0.04 \text{ m}}} = 15.6 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

$$\delta = \omega_0$$

$$\frac{k}{2m} = \omega_0$$

$$k = 2m \cdot \omega_0$$

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{39.2 \text{ N}}{9.81 \text{ ms}^{-2}} = 4 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{F_G}{\Delta y \cdot m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\Delta y \cdot m}} \\ &= \sqrt{\frac{g}{\Delta y}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ ms}^{-2}}{0.04 \text{ m}}} = 15.6 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

$$k = 2m\omega_0 = 2 \cdot 4 \cdot 15.6 \text{ kg s}^{-1} = 125.16 \text{ kg s}^{-1} = 125.16 \text{ N s m}^{-1}$$

Aufgabe 5.21

Schreibe den Ausdruck als Produkt zweier trigonometrischer Funktionen.

(a) $u(t) = \cos 9t - \cos 7t$

(b) $u(t) = \sin 7t - \sin 3t$

(c) $u(t) = \cos \pi t + \cos 2\pi t$

(d) $u(t) = \sin 3.6t + \sin 3.2t$

Aufgabe 5.21

Formelsammlung S. 99 (Summen und Produkte)

(a) $u(t) = \cos(9t) - \cos(7t) = -2 \sin(8t) \cdot \sin(t)$

(b) $u(t) = \sin(7t) - \sin(3t) = 2 \cos(5t) \cdot \sin(2t)$

(c) $u(t) = \cos(\pi t) + \cos(2\pi t) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

(d) $u(t) = \sin(3.6t) + \sin(3.2t) = 2 \sin(3.4t) \cdot \cos(0.2t)$

Aufgabe 5.22

Eine Masse von 0.1 kg ist vertikal an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ befestigt und befindet sich in Ruhe. Auf die Masse wirkt nun eine äussere Kraft von $10 \cos(18t) \text{ N}$.

- (a) Bestimme die Position der Masse als Funktion $y(t)$ der Zeit $t \geq 0$.
- (b) Zeige, dass es sich um eine Schwebung handelt, indem du die Bewegungsgleichung in ein Produkt umformst und damit die Kreisfrequenzen der Überlagerungsschwingung und der Einhüllenden bestimmst. *Hinweis:* Skizziere mit dem Taschenrechner die Weg-Zeit-Funktion $y(t)$ für $0 \leq t < 2\pi$ und $-3 \leq y \leq 3$.

Aufgabe 5.22

(a) $m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$

Aufgabe 5.22

(a) $m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$$

Aufgabe 5.22

$$(a) \quad m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0.1} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

Aufgabe 5.22

$$(a) \quad m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{40 \text{ N} \cdot \text{s}}{0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$A = \frac{F_0}{m} = \frac{10 \text{ N}}{0.1 \text{ kg}} = 100 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Aufgabe 5.22

(a) $m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0.1} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$A = \frac{F_0}{m} = \frac{10 \text{ N}}{0.1 \text{ kg}} = 100 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$y_h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t$$

Aufgabe 5.22

(a) $m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{40 \text{ N} \cdot \text{s}}{0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$A = \frac{F_0}{m} = \frac{10 \text{ N}}{0.1 \text{ kg}} = 100 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$y_h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t$$

$$y_p(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \cos \omega_1 t = \frac{25}{19} \cos 18t$$

Aufgabe 5.22

(a) $m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0.1} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$A = \frac{F_0}{m} = \frac{10 \text{ N}}{0.1 \text{ kg}} = 100 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$y_h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t$$

$$y_p(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \cos \omega_1 t = \frac{25}{19} \cos 18t$$

$$y(t) = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t + \frac{25}{19} \cos 18t$$

Aufgabe 5.22

(a) $m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{40 \text{ N} \cdot \text{s}}{0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$A = \frac{F_0}{m} = \frac{10 \text{ N}}{0.1 \text{ kg}} = 100 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$y_h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t$$

$$y_p(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \cos \omega_1 t = \frac{25}{19} \cos 18t$$

$$y(t) = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t + \frac{25}{19} \cos 18t$$

$$\dot{y}(t) = -20C_1 \sin 20t + 20C_2 \cos 20t - \frac{25}{19} \cdot 18 \cdot \sin 18t$$

Lösung des Anfangswertproblems:

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(0) = C_1 + \frac{25}{19} = 0$$

$$\dot{y}(0) = 20C_2 = 0$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(0) = C_1 + \frac{25}{19} = 0$$

$$\dot{y}(0) = 20C_2 = 0$$

$$\text{Also: } C_1 = -\frac{25}{19}, C_2 = 0$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(0) = C_1 + \frac{25}{19} = 0$$

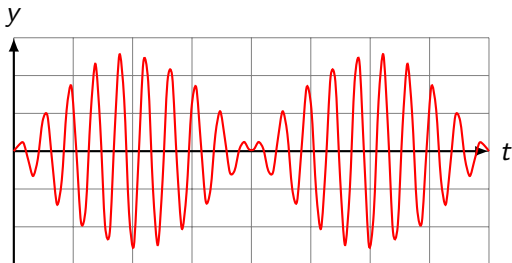
$$\dot{y}(0) = 20C_2 = 0$$

$$\text{Also: } C_1 = -\frac{25}{19}, C_2 = 0$$

$$y(t) = \frac{25}{19}(\cos 18t - \cos 20t) \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad y(t) &= \frac{25}{19}(\cos 18t - \cos 20t) \\ &= \frac{25}{19} \cdot (-2) \cdot \sin t \cdot \sin(-19t) \\ &= \frac{50}{19} \cdot \sin t \cdot \sin 19t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad y(t) &= \frac{25}{19}(\cos 18t - \cos 20t) \\ &= \frac{25}{19} \cdot (-2) \cdot \sin t \cdot \sin(-19t) \\ &= \frac{50}{19} \cdot \sin t \cdot \sin 19t \end{aligned}$$



Aufgabe 5.23

Eine Feder werde durch eine angehängte Masse von 0.5 kg um 0.49 m gedehnt. Das Feder-Masse-System befinde sich in einem Medium, dessen Reibungswiderstand $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$ beträgt. Die in ihrer statischen Ruhelage ruhende Masse werde durch eine periodische Kraft gestört.

Zeige, dass Resonanz auftreten kann und berechne die Resonanzfrequenz ω_R .

Aufgabe 5.23

Gegeben : $m = 0.5 \text{ kg}$, $\Delta y = 0.49 \text{ m}$, $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$

Aufgabe 5.23

Gegeben : $m = 0.5 \text{ kg}$, $\Delta y = 0.49 \text{ m}$, $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$

$$D = \frac{F_G}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow$$

Aufgabe 5.23

Gegeben : $m = 0.5 \text{ kg}$, $\Delta y = 0.49 \text{ m}$, $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$

$$D = \frac{F_G}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.49 \text{ m}} = 10.0 \text{ N m}^{-1}$$

Aufgabe 5.23

Gegeben : $m = 0.5 \text{ kg}$, $\Delta y = 0.49 \text{ m}$, $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$

$$D = \frac{F_G}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.49 \text{ m}} = 10.0 \text{ N m}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} = \frac{2 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.5 \text{ kg}} \Rightarrow$$

Aufgabe 5.23

Gegeben : $m = 0.5 \text{ kg}$, $\Delta y = 0.49 \text{ m}$, $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$

$$D = \frac{F_G}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.49 \text{ m}} = 10.0 \text{ N m}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} = \frac{2 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.5 \text{ kg}} \Rightarrow \delta = 2 \text{ s}^{-1}$$

Aufgabe 5.23

Gegeben : $m = 0.5 \text{ kg}$, $\Delta y = 0.49 \text{ m}$, $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$

$$D = \frac{F_G}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.49 \text{ m}} = 10.0 \text{ N m}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} = \frac{2 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.5 \text{ kg}} \Rightarrow \delta = 2 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 4.47 \text{ s}^{-1}$$

Resonanz tritt dann ein, wenn die Amplitude in $y_i(t)$

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 4\delta^2\omega_1^2}}$$

ein Maximum für ω_1 hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 4\delta^2\omega_1^2$$

für ω_1 minimal wird:

$$\frac{d}{d\omega_1}(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 4\delta\omega_1 = 0$$

$$2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 = 0$$

$$4\omega_1^2(\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) = 0$$

Da $\omega_1 = 0$ keine interessante Lösung darstellt, muss der zweite Faktor verschwinden:

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Diese Minimalstelle existiert aber nur dann, wenn $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$ gilt.
Ist das bei unserem Beispiel erfüllt?

$$2\text{ s}^{-1} < \frac{4.47}{\sqrt{2}}\text{ s}^{-1} = 3.16\text{ s}^{-1} \quad (\text{ok})$$

Resonanzfrequenz:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 3.46\text{ s}^{-1}$$