

Differenzialgleichungen (4)

Übungen

Aufgabe 4.1

Bestimme den Wert der Lösungsfunktion der DGL $y' = \frac{x - y}{x + y}$ mit dem Anfangswert $(x_0, y_0) = (1, 2)$ an der Stelle $x = 4$ mit

- (a) dem Verfahren von Euler
- (b) dem Verfahren von Runge und Kutta

bei einer Schrittweite von $h = 0.1$. Runde das Ergebnis auf vier signifikante Stellen.

Aufgabe 4.1

(a) Euler: $x = 4$, $y = 2.254$

(b) Runge-Kutta: $x = 4$ $y = 2.245$

Mit der exakten Lösung hätte man $y = 2.245$ erhalten.

Aufgabe 4.2

Um 1920 stellte R. Pearl experimentell fest, dass die Änderungsrate dP/dt einer Population von Fruchtfliegen (*Drosophila*) mit der Populationsgrösse $P(t)$ mittels der Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 \quad (t \text{ in Tagen})$$

zusammenhängt. Anfänglich seien 10 Fruchtfliegen vorhanden. Wie gross ist die Population nach 12 Tagen?

Verwende zur Lösung der Aufgabe das Verfahren von Runge und Kutta und experimentiere mit der Schrittweite, bis du eine „stabile“ Lösung gefunden hast. (Vergleiche das Ergebnis mit dem von Aufgabe 1.3.)

Aufgabe 4.2

Die Population umfasst nach 12 Tagen etwa 100 Fruchtfliegen.

Man erhält das Resultat bereits mit $h = 4$ und $n = 3$ Schritten.

Aufgabe 4.3

Das bestimmte Integral

$$I_a(b) = \int_a^b f(x) \, dx$$

kann als Spezialfall der Differenzialgleichung $I'_a(x) = f(x)$ mit dem Anfangswert $x = a$ und $I_a(a) = 0$ aufgefasst werden.

- (a) Berechne mit dem Verfahren von Runge und Kutta ($h = 0.1$) das Integral

$$\int_1^4 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$$

- (b) Berechne das exakte Resultat.
(c) Berechne den relativen Fehler.

Aufgabe 4.3

(a) $y(1) = 0$, denn für die gesuchte (Stamm)Funktion gilt

$$y(a) = F_a(a) = 0$$

$$h = 0.1; n = 30; f(x, y) = x + 1/x$$

$$A \approx 8.886294567$$

(b)

$$\int_1^4 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| \right]_1^4$$

$$= 8 + \ln 4 - \frac{1}{2} - 0 = 7.5 + \ln 4 \approx 8.886294361 \rightarrow$$

(c) relativer Fehler: $\frac{A - B}{B} = 2.32 \cdot 10^{-8}$

Aufgabe 4.4

Bei einem Einschrittverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen wird die Schrittweite h mit dem Faktor 0.1 verkleinert. Um wie viele Stellen wird das Ergebnis ungefähr verbessert, wenn es sich dabei um

- (a) das Verfahren von Euler,
- (b) das Verfahren von Runge und Kutta

handelt?

Aufgabe 4.4

- (a) um eine Stelle ($0.1^4 = 0.0001$)
- (b) um vier Stellen ($0.1^1 = 0.1$)