Differenzialgleichungen (2)

Übungen

Aufgabe 2.1

Berechne für $f(x, y) = x^2y^3 - \frac{x}{y} + \sin(xy)$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}$

(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(d) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(e) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(f) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Aufgabe 2.1

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - \dfrac{1}{y} + y\cos(xy)$

Aufgabe 2.1

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - \dfrac{1}{y} + y\cos(xy)$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \dfrac{x}{y^2} + x\cos(xy)$

Aufgabe 2.1

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - \dfrac{1}{y} + y\cos(xy)$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \dfrac{x}{y^2} + x\cos(xy)$

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 - y^2\sin(xy)$

Aufgabe 2.1

(a) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - \frac{1}{y} + y\cos(xy)$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{x}{y^2} + x\cos(xy)$$

(c) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 - y^2\sin(xy)$$

(d) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - \frac{2x}{y^3} - x^2\sin(xy)$$

Aufgabe 2.1

(a) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - \frac{1}{y} + y\cos(xy)$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{x}{y^2} + x\cos(xy)$$

(c) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 - y^2\sin(xy)$$

(d) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - \frac{2x}{y^3} - x^2\sin(xy)$$

(e) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 + \frac{1}{y^2} + \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

Aufgabe 2.1

(a) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - \frac{1}{y} + y\cos(xy)$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{x}{y^2} + x\cos(xy)$$

(c) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 - y^2\sin(xy)$$

(d) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - \frac{2x}{y^3} - x^2\sin(xy)$$

(e) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 + \frac{1}{y^2} + \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

(f) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 + \frac{1}{y^2} + \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

Aufgabe 2.2

In welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 5x + 6y - 9$$

möglicherweise ein Extremum?

Aufgabe 2.2

Die Steigungen in x- und in y-Richtung müssen Null sein.

Aufgabe 2.2

Die Steigungen in x- und in y-Richtung müssen Null sein.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 5 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 4y + 6 = 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 2.2

Die Steigungen in x- und in y-Richtung müssen Null sein.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 5 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 4y + 6 = 0 \qquad (2)$$

Das Gleichungssystem aus (1) und (2) hat die Lösung $(2, -1)$.

Aufgabe 2.3

In welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat die Funktion

$f(x, y) = x^3 - y^3 - 12x + 3y - 5$

möglicherweise ein Extremum?

Aufgabe 2.3

Die Steigungen in x- und in y-Richtung müssen Null sein.

Aufgabe 2.3

Die Steigungen in x- und in y-Richtung müssen Null sein.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 3 = 0 \quad (2)$$

Aufgabe 2.3

Die Steigungen in x- und in y-Richtung müssen Null sein.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 3 = 0 \quad (2)$$

Das Gleichungssystem aus (1) und (2) hat die Lösungen

$(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, -1)$

Aufgabe 2.4

Beschreibe die DGL $y'' + x^2 + xy = 0$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.4

$$y'' + x^2 + xy = 0$$

gewöhnliche, lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung

Aufgabe 2.5

Beschreibe die DGL $y^{(5)} = y$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.5

$$y^{(5)} = y$$

gewöhnliche lineare homogene DGL 5. Ordnung mit konstanten Koeffizienten in expliziter Form

Aufgabe 2.6

Beschreibe die DGL $x^2 y' + xy = 0$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.6

$x^2 y' + xy = 0$

gewöhnliche lineare homogene DGL 1. Ordnung

Aufgabe 2.7

Beschreibe die DGL $(y'')^2 - 5x + \frac{1}{y} = 0$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.7

$$(y'')^2 - 5x + \frac{1}{y} = 0$$

gewöhnliche nichtlineare DGL 2. Ordnung

Aufgabe 2.8

Beschreibe die DGL $y^{(4)} = 5y^{(3)} - 4xy'' + y - 1$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.8

$$y^{(4)} = 5y^{(3)} - 4xy'' + y - 1$$

gewöhnliche, explizite, lineare und inhomogene DGL 4. Ordnung

Aufgabe 2.9

Prüfe nach, ob die angegebene Funktionenschar die Differenzialgleichung auf dem Intervall I löst. C, C_1, und C_2 sind willkürliche reelle Konstanten.

(a) Gleichung: $y' = x + \cos x$
Lösungskandidat: $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$ auf $I = \mathbb{R}$

Aufgabe 2.9

Prüfe nach, ob die angegebene Funktionenschar die Differenzialgleichung auf dem Intervall I löst. C, C_1, und C_2 sind willkürliche reelle Konstanten.

(a) Gleichung: $y' = x + \cos x$
Lösungskandidat: $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$ auf $I = \mathbb{R}$

(b) Gleichung: $y' = 2xy$
Lösungskandidat: $y(x) = Ce^{x^2}$ auf $I = \mathbb{R}$

Aufgabe 2.9

Prüfe nach, ob die angegebene Funktionenschar die Differenzialgleichung auf dem Intervall I löst. C, C_1, und C_2 sind willkürliche reelle Konstanten.

(a) Gleichung: $y' = x + \cos x$
Lösungskandidat: $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$ auf $I = \mathbb{R}$

(b) Gleichung: $y' = 2xy$
Lösungskandidat: $y(x) = Ce^{x^2}$ auf $I = \mathbb{R}$

(c) Gleichung: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
Lösungskandidat: $y(x) = C_1x + C_2x^2$ auf $I = \mathbb{R}$

Aufgabe 2.9

(a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$ und
$y'(x) = x + \cos x$ in die DGL einsetzen:
$x + \cos x = x + \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2.9

(a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$ und
$y'(x) = x + \cos x$ in die DGL einsetzen:
$x + \cos x = x + \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = Ce^{x^2}$
$y'(x) = 2xCe^{x^2}$ in die DGL einsetzen:
$2xCe^{x^2} = 2xCe^{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2.9

(a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$ und
$y'(x) = x + \cos x$ in die DGL einsetzen:
$x + \cos x = x + \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = Ce^{x^2}$
$y'(x) = 2xCe^{x^2}$ in die DGL einsetzen:
$2xCe^{x^2} = 2xCe^{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = C_1 x + C_2 x^2$
$y'(x) = C_1 + 2xC_2$
$y''(x) = 2C_2$ in die DGL einsetzen:
$$x^2 \cdot 2C_2 - 2x(C_1 + 2xC_2) + 2(C_1 x + C_2 x^2)$$
$$= 2C_2x^2 - 2C_1x - 4C_2x^2 + 2C_1x + 2C_2x^2 = 0$$

Aufgabe 2.10

Bestimme die Werte für r, für welche die gegebenen Differenzialgleichungen Lösungen der Form $y = \mathrm{e}^{rx}$ besitzen.

(a) $y' + 2y = 0$

(b) $y'' + y' - 6y = 0$

Aufgabe 2.10

(a) Ansatz: $y = \mathrm{e}^{rx}$

$$y' = r\,\mathrm{e}^{rx}$$

Aufgabe 2.10

(a) Ansatz: $y = \mathrm{e}^{rx}$

$$y' = r\,\mathrm{e}^{rx}$$

in die DGL einsetzen:

Aufgabe 2.10

(a) Ansatz: $y = \mathrm{e}^{rx}$

$$y' = r\,\mathrm{e}^{rx}$$

in die DGL einsetzen:

$$r\,\mathrm{e}^{rx} + 2\,\mathrm{e}^{rx} = 0$$

Aufgabe 2.10

(a) Ansatz: $y = \mathrm{e}^{rx}$

$$y' = r\,\mathrm{e}^{rx}$$

in die DGL einsetzen:

$$r\,\mathrm{e}^{rx} + 2\,\mathrm{e}^{rx} = 0$$

$$\mathrm{e}^{rx}(r+2) = 0 \qquad || : \mathrm{e}^{rx}(\neq 0)$$

Aufgabe 2.10

(a) Ansatz:
$$y = \mathrm{e}^{rx}$$
$$y' = r\,\mathrm{e}^{rx}$$

in die DGL einsetzen:

$$r\,\mathrm{e}^{rx} + 2\,\mathrm{e}^{rx} = 0$$
$$\mathrm{e}^{rx}(r+2) = 0 \qquad || : \mathrm{e}^{rx}(\neq 0)$$
$$r + 2 = 0$$

Aufgabe 2.10

(a) Ansatz: $$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{rx} \\ y' &= r\,\mathrm{e}^{rx} \end{aligned}$$

in die DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} r\,\mathrm{e}^{rx} + 2\,\mathrm{e}^{rx} &= 0 \\ \mathrm{e}^{rx}(r+2) &= 0 \qquad || : \mathrm{e}^{rx}(\neq 0) \\ r+2 &= 0 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

(b) Ansatz: $y = \mathrm{e}^{rx}$

(b) Ansatz: $$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{rx} \\ y' &= r\,\mathrm{e}^{rx} \end{aligned}$$

(b) Ansatz:

$$
\begin{aligned}
y &= e^{rx} \\
y' &= r\,e^{rx} \\
y'' &= r^2\,e^{rx}
\end{aligned}
$$

(b) Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{rx} \\ y' &= r\,\mathrm{e}^{rx} \\ y'' &= r^2\,\mathrm{e}^{rx} \end{aligned}$$

in die DGL einsetzen:

(b) Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{rx} \\ y' &= r\,\mathrm{e}^{rx} \\ y'' &= r^2\,\mathrm{e}^{rx} \end{aligned}$$

in die DGL einsetzen:

$$r^2\,\mathrm{e}^{rx} + r\,\mathrm{e}^{rx} - 6\,\mathrm{e}^{rx} = 0$$

(b) Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= e^{rx} \\ y' &= r\, e^{rx} \\ y'' &= r^2\, e^{rx} \end{aligned}$$

in die DGL einsetzen:

$$r^2\, e^{rx} + r\, e^{rx} - 6\, e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + r - 6) = 0 \qquad || : e^{rx}(\neq 0)$$

(b) Ansatz:
$$y = \mathrm{e}^{rx}$$
$$y' = r\,\mathrm{e}^{rx}$$
$$y'' = r^2\,\mathrm{e}^{rx}$$

in die DGL einsetzen:

$$r^2\,\mathrm{e}^{rx} + r\,\mathrm{e}^{rx} - 6\,\mathrm{e}^{rx} = 0$$
$$\mathrm{e}^{rx}(r^2 + r - 6) = 0 \qquad || : \mathrm{e}^{rx}(\neq 0)$$
$$r^2 + r - 6 = 0$$

(b) Ansatz:

$$y = \mathrm{e}^{rx}$$
$$y' = r\,\mathrm{e}^{rx}$$
$$y'' = r^2\,\mathrm{e}^{rx}$$

in die DGL einsetzen:

$$r^2\,\mathrm{e}^{rx} + r\,\mathrm{e}^{rx} - 6\,\mathrm{e}^{rx} = 0$$
$$\mathrm{e}^{rx}(r^2 + r - 6) = 0 \qquad || : \mathrm{e}^{rx}(\neq 0)$$
$$r^2 + r - 6 = 0$$
$$(r-2)(r+3) = 0$$

(b) Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= e^{rx} \\ y' &= r\,e^{rx} \\ y'' &= r^2\,e^{rx} \end{aligned}$$

in die DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} r^2\,e^{rx} + r\,e^{rx} - 6\,e^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(r^2 + r - 6) &= 0 \qquad || : e^{rx}(\neq 0) \\ r^2 + r - 6 &= 0 \\ (r-2)(r+3) &= 0 \\ r_1 &= 2 \end{aligned}$$

(b) Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= e^{rx} \\ y' &= r\,e^{rx} \\ y'' &= r^2\,e^{rx} \end{aligned}$$

in die DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} r^2\,e^{rx} + r\,e^{rx} - 6\,e^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(r^2 + r - 6) &= 0 \qquad \| : e^{rx} (\neq 0) \\ r^2 + r - 6 &= 0 \\ (r-2)(r+3) &= 0 \\ r_1 &= 2 \\ r_2 &= -3 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.11

Zeige, dass die Funktion $y(x) = 2/(2 - x^2)$ für $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ das Anfangswertproblem

$$y' = xy^2 \quad \text{mit } y(0) = 1$$

löst.

Aufgabe 2.11

Kandidat: $y(x) = \dfrac{2}{2 - x^2} = 2(2 - x^2)^{-1}$

Aufgabe 2.11

Kandidat: $y(x) = \dfrac{2}{2 - x^2} = 2(2 - x^2)^{-1}$

Kettenregel: $y'(x) = -2(2 - x^2)^{-2} \cdot (-2x) = \dfrac{4x}{(2 - x^2)^2}$

Aufgabe 2.11

Kandidat: $y(x) = \dfrac{2}{2-x^2} = 2(2-x^2)^{-1}$

Kettenregel: $y'(x) = -2(2-x^2)^{-2} \cdot (-2x) = \dfrac{4x}{(2-x^2)^2}$

Quotientenregel: $\dfrac{0 \cdot (2-x^2) - 2(-2x)}{(2-x^2)^2} = \dfrac{4x}{(2-x^2)^2}$

Aufgabe 2.11

Kandidat: $y(x) = \dfrac{2}{2 - x^2} = 2(2 - x^2)^{-1}$

Kettenregel: $y'(x) = -2(2 - x^2)^{-2} \cdot (-2x) = \dfrac{4x}{(2 - x^2)^2}$

Quotientenregel: $\dfrac{0 \cdot (2 - x^2) - 2(-2x)}{(2 - x^2)^2} = \dfrac{4x}{(2 - x^2)^2}$

$y(x)$ und $y'(x)$ in die DGL einsetzen:

Aufgabe 2.11

Kandidat: $y(x) = \dfrac{2}{2 - x^2} = 2(2 - x^2)^{-1}$

Kettenregel: $y'(x) = -2(2 - x^2)^{-2} \cdot (-2x) = \dfrac{4x}{(2 - x^2)^2}$

Quotientenregel: $\dfrac{0 \cdot (2 - x^2) - 2(-2x)}{(2 - x^2)^2} = \dfrac{4x}{(2 - x^2)^2}$

$y(x)$ und $y'(x)$ in die DGL einsetzen:

$$\frac{4x}{(2 - x^2)^2} = x \left(\frac{2}{2 - x^2} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{(2 - x^2)^2} = \frac{4x}{(2 - x^2)^2} \quad \text{(ok)}$$

Aufgabe 2.11

Kandidat: $y(x) = \dfrac{2}{2-x^2} = 2(2-x^2)^{-1}$

Kettenregel: $y'(x) = -2(2-x^2)^{-2} \cdot (-2x) = \dfrac{4x}{(2-x^2)^2}$

Quotientenregel: $\dfrac{0 \cdot (2-x^2) - 2(-2x)}{(2-x^2)^2} = \dfrac{4x}{(2-x^2)^2}$

$y(x)$ und $y'(x)$ in die DGL einsetzen:

$$\frac{4x}{(2-x^2)^2} = x\left(\frac{2}{2-x^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{(2-x^2)^2} = \frac{4x}{(2-x^2)^2} \quad \text{(ok)}$$

AWP: $y(0) = \dfrac{2}{2-0} = 1$ (ok)

Aufgabe 2.12

Zeige, dass die Funktion $y(x) = x - x \ln x$ für $x > 0$ das Anfangswertproblem

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad \text{mit } y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \text{ und } x > 0$$

löst.

Aufgabe 2.12

- Ableitungen bereitstellen:

$$y(x) = x - x \ln x \qquad (x > 0)$$
$$y'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x}\right) = -\ln x$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x}$$

- Terme in die DGL einsetzen:

Aufgabe 2.12

- Ableitungen bereitstellen:

$$y(x) = x - x\ln x \qquad (x > 0)$$
$$y'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x}$$

- Terme in die DGL einsetzen:

$$x^2 \cdot \frac{-1}{x} - x \cdot \ln x + x - x\ln x$$
$$= -x - x\ln x + x - x\ln x$$
$$= 0 \quad \forall\, x > 0$$

Aufgabe 2.12

- Ableitungen bereitstellen:

$$y(x) = x - x\ln x \qquad (x > 0)$$
$$y'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x}$$

- Terme in die DGL einsetzen:

$$x^2 \cdot \frac{-1}{x} - x \cdot \ln x + x - x\ln x$$
$$= -x - x\ln x + x - x\ln x$$
$$= 0 \quad \forall\, x > 0$$

- Anfangswerte überprüfen:

Aufgabe 2.12

- Ableitungen bereitstellen:

$$y(x) = x - x \ln x \qquad (x > 0)$$
$$y'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x}$$

- Terme in die DGL einsetzen:

$$x^2 \cdot \frac{-1}{x} - x \cdot \ln x + x - x \ln x$$
$$= -x - x \ln x + x - x \ln x$$
$$= 0 \quad \forall\, x > 0$$

- Anfangswerte überprüfen:

$$y(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1 \text{ (ok)}$$

Aufgabe 2.12

- Ableitungen bereitstellen:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= x - x\ln x \qquad (x > 0)\\
y'(x) &= 1 - \left(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right) = -\ln x\\
y''(x) &= -\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

- Terme in die DGL einsetzen:

$$
\begin{aligned}
&x^2 \cdot \frac{-1}{x} - x \cdot \ln x + x - x\ln x\\
&= -x - x\ln x + x - x\ln x\\
&= 0 \quad \forall\, x > 0
\end{aligned}
$$

- Anfangswerte überprüfen:

$$y(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1 \text{ (ok)}$$

$$y'(1) = -\ln 1 = 0 \text{ (ok)}$$

Aufgabe 2.13

Zeige, dass die Funktion $y(x) = 3e^{2x} - 2xe^{2x} - \cos 2x$ das Anfangswertproblem

$$y'' - 4y' + 4y + 8\sin 2x = 0 \quad \text{mit } y(0) = 2 \text{ und } y'(0) = 4$$

löst.

Aufgabe 2.13