Lineare Algebra

Anwendungen

Version vom 8. November 2023

1 Das Leontief-Modell (vereinfacht)

Die Ökonomie einer autarken Insel wird durch die folgenden drei Produktionssektoren dominiert:

- Fischfang
- Holzgewinnung
- Rumdestillation

Diese Sektoren sind ineinander verzahnt. Die folgende Tabelle zeigt, welcher Bruchteil des Outputs eines Sektors als Input für die Produktion eines anderen Sektors oder sich selbst benötigt wird.

Fischfang	Holzgewinnung	Rumdestillation	gekauft von ...
0.3	0.6	0.6	Fischfang
0.5	0.0	0.3	Holzgewinnung
0.2	0.4	0.1	Rumdestillation

Die Fisch, Holz- und Rumindustrie erwirtschaften insgesamt 3.38 Millionen Insel-Dollar pro Jahr. Berechne die Werte p_F, p_H und p_R der Jahresproduktion der jeweiligen Sektoren, wenn die Inselwirtschaft im Gleichgewicht ist, d. h. wenn die jeweiligen Ausgaben durch die Einnahmen gedeckt werden.

Fisch: $1.0p_F - 0.3p_F - 0.6p_H - 0.6p_R = 0$

Holz: $-0.5p_F + 1.0p_H - 0.3p_R = 0$

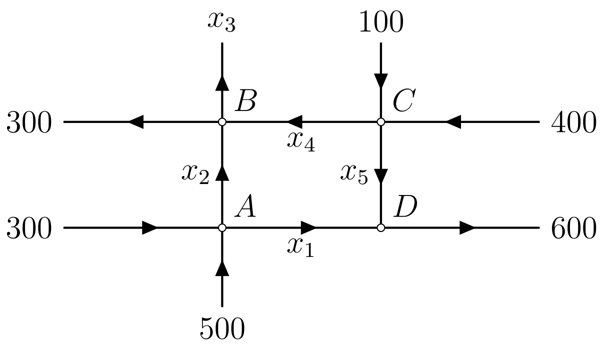
Rum: $-0.2p_F - 0.4p_H + 1.0p_R - 0.1p_R = 0$

$$\begin{aligned} 0.7p_F - 0.6p_H - 0.6p_R &= 0 \\ -0.5p_F + 1.0p_H - 0.3p_R &= 0 \\ -0.2p_F - 0.4p_H + 0.9p_R &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_F &= 1.95p_R \\ p_H &= 1.275p_R \\ p_R &= p_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_F + p_H + p_R &= 3.38 \cdot 10^6 \\ 1.95p_R + 1.275p_R + p_R &= 3.38 \cdot 10^6 \\ 4.225p_R &= 3.38 \cdot 10^6 \\ p_R &= 0.8 \cdot 10^6 \text{ Insel-Dollar} \\ p_F &= 1.56 \cdot 10^6 \text{ Insel-Dollar} \\ p_H &= 1.02 \cdot 10^6 \text{ Insel-Dollar} \end{aligned}$$

2 Netzwerkflüsse

Das unten abgebildete Netzwerk zeigt die Verkehrsflüsse (in Fahrzeugen pro Stunde) entlang einiger Einbahnstrassen in einer Stadt am frühen Nachmittag.



Stelle die Gleichungen für die Flüsse in den Knoten des Netzwerks auf und bestimme damit eine allgemeine Lösung des Systems und ihre Einschränkung(en).

Knoten	Ein		Aus
A	$300 + 500$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_4$	$=$	$300 + x_3$
C	$100 + 400$	$=$	$x_4 + x_5$
D	$x_1 + x_2$	$=$	600

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 800 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 300 \\ x_4 + x_5 &= 500 \\ x_1 + x_5 &= 600 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{array}$$

Die Variable x_5 ist frei (keine Pivot-Spalte).

$x_1 = 600 - x_5$

$x_2 = 200 + x_5$

$x_3 = 400$

$x_4 = 500 - x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 \leq 500$

$x_5 = x_5$

3 Konstruktion einer „ausgewogenen“ Diät

In den 1960er Jahren wurde an der Cambridge University in England unter der Leitung von Dr. Alan Howard eine Diät zur schnellen Gewichtsabnahme entwickelt, welche wichtige Nährstoffe wie Kohlenhydrate, Protein, Fett, Vitamine, Spurenelement sowie Elektrolyte in Pulverform und in ausgewogenener Zusammensetzung enthält.

Hinweis: Seit den 1980er Jahren wurden verschiedene kommerzielle Versionen dieser Diät auf den Markt gebracht und teilweise auch wieder vom Markt genommen, da die schnelle Gewichtsabnahme ohne ärztliche Kontrolle schwere gesundheitliche Schäden verursachen kann[1].

Bestimme eine geeignete Zusammensetzung von Magermilch, Soja und Molke, um die von der Diät vorgegebenen täglichen Mengen an Protein, Kohlenhydraten und Fett zu erreichen, welche ganz rechts in der folgenden Tabelle stehen. Die drei mittleren Kolonnen in der Tabelle geben an, welche Mengen des jeweiligen Nährstoffs in 100 g des ganz links angegebenen Nahrungsmittels enthalten sind.

Nährstoff	Magermilch	Sojamehl	Molke	Tagesbedarf
Protein	36 g	51 g	13 g	33 g
Kohlenhydrate	52 g	34 g	74 g	45 g
Fett	0 g	7 g	1.1 g	3 g

x_1, x_2, x_3: Anzahl 100-g-Einheiten Magermilch, Sojamehl, Molke

$$\begin{aligned} 36x_1 + 51x_2 + 13x_3 &= 33 & & & x_1 &= 0.277 \\ 52x_1 + 34x_2 + 74x_3 &= 45 & &\Rightarrow & x_2 &= 0.392 \\ 7x_2 + 1.1x_3 &= 3 & & & x_3 &= 0.233 \end{aligned}$$

Somit müssen 0.277 Einheiten Magermilch, 0.392 Einheiten Sojamehl und 0.233 Einheiten Molke gemischt werden um die vorgegebenen Mengen an Nährstoffen zu erhalten.

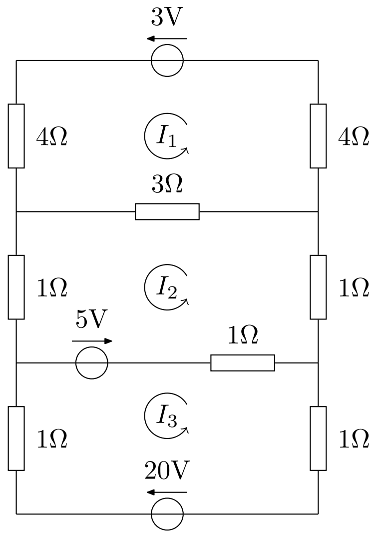
Wichtig: Die Lösung ist nur sinnvoll, weil x_1, x_2, $x_3 \geq 0$ sind. Soll die Diät weitere Nährstoffe enthalten, müssen evtl. zusätzliche Nahrungsmittel hinzugenommen werden, um ein Gleichungssystem mit nichtnegativen Lösungen zu erhalten.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/The_Cambridge_Diet

4 Einfache elektrische Netzwerke

Eine Spannungsquelle lässt die Elektronen durch die Leiter fliessen, wobei die Spannung über jedem Widerstand nach dem ohmschen Gesetz ($U = R \cdot I$) abfällt. Das unten abgebildete Netzwerk besteht aus drei Maschen mit den jeweiligen Stromflüssen I_1, I_2 und I_3, deren Richtungen zunächst willkürlich gewählt wurden.

Bestimme mit Hilfe des Kirchhoff'schen Maschensatzes die Stromstärken in den drei Maschen des unten abgebildeten Netzwerks.

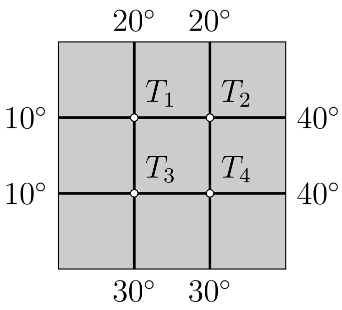


$$\begin{aligned} 11I_1 - 3I_2 &= 30 \\ -3I_1 + 6I_2 - I_3 &= 5 \\ -I_2 + 3I_3 &= -25 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} I_1 &= 3\,\mathrm{A} \\ I_2 &= 1\,\mathrm{A} \\ I_3 &= -8\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Wegen $I_3 < 0$ fliesst der Strom entgegengesetzt zur angenommenen Richtung.

5 Ein einfaches Wärmeleitungsmodell

Die Temperaturverteilung an den Rändern einer quadratischen dünnen Platte aus homogenem Material sei gegeben. Die Wärme fliesst entlang der eingezeichneten Linien; der Wärmefluss senkrecht zu diesen Linien soll vernachlässigt werden.



T_1, T_2, T_3 und T_4 bezeichnet die Temperatur an den vier inneren Punkten der Platte. Die Temperatur dort entspricht näherungsweise dem Mittelwert der vier unmittelbar benachbarten Punkten.

Formuliere ein Gleichungssystem, das die Temperaturverteilung in den vier inneren Punkten beschreibt und löse dieses System.

$$\begin{aligned} 4T_1 &= T_2 + T_3 + 30 \\ 4T_2 &= T_1 + T_4 + 60 \\ 4T_3 &= T_1 + T_4 + 40 \\ 4T_4 &= T_2 + T_3 + 70 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4T_1 - T_2 - T_3 &= 30 \\ -T_1 + 4T_2 - T_4 &= 60 \\ -T_1 + 4T_3 - T_4 &= 40 \\ -T_2 - T_3 + 4T_4 &= 70 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 4 & -1 & -1 & 0 & 30 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 60 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 60 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 15 & -4 & 190 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \\ 0 & -1 & 15 & -4 & 190 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 20 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \\ 0 & 0 & 16 & -8 & 120 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 300 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 300 \\ 0 & 0 & 16 & -8 & 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 720 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & 0 & 70 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 4 & 0 & 70 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 45/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -55/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 45/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 55/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 45/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}$$