Aufgabe 2.1

(a) Ja (b) Ja (c) Ja

Aufgabe 2.2

(a) Ja

(b) Nein, denn die Nullzeile steht nicht am Ende der Matrix.

(c) Nein, denn die führende Eins in der zweiten Zeile steht nicht rechts von der führenden Eins in der ersten Spalte.

Aufgabe 2.3

Welche der folgenden Matrizen haben Zeilenstufenform?

(a) Ja

(b) Ja

(c) Nein, denn die dritte Zeile hat weder eine führende Eins, noch steht die Zahl rechts von derjenigen in Zeile drei.

Aufgabe 2.4

(a) reduzierte Zeilenstufenform

(b) Zeilenstufenform

Aufgabe 2.5

$x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$ oder $L = \{(-3, 0, 5)\}$

Aufgabe 2.6

$L = \{\,\}$

Wegen der letzten Zeile $(0 = 1)$ ist das System inkonsistent.

Aufgabe 2.7

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_2 &= 2 - 2x_3 \\ x_3 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -37 \\ x_2 &= -8 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.8

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\
-x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\
3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 2 & 8 & & \cdot(-3) \\
-1 & -2 & 3 & 1 & + & \\
3 & -7 & 4 & 10 & & +
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 2 & 8 & \\
0 & -1 & 5 & 9 & \cdot(-1) \\
0 & -10 & -2 & -14 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 2 & 8 & \\
0 & 1 & -5 & -9 & \cdot 10 \\
0 & -10 & -2 & -14 & +
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 2 & 8 & \\
0 & 1 & -5 & -9 & \\
0 & 0 & -52 & -104 & \cdot(-\frac{1}{52})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 2 & 8 & & + \\
0 & 1 & -5 & -9 & + & \\
0 & 0 & 1 & 2 & \cdot 5 & \cdot(-2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 4 & + \\
0 & 1 & 0 & 1 & \cdot(-1) \\
0 & 0 & 1 & 2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 1 \\
x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.9

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & 2 & 2 & 0 & \cdot \frac{1}{2} \\ -2 & 5 & 2 & 1 & \\ 8 & 1 & 4 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ll} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot 2 & \cdot (-8) \\ -2 & 5 & 2 & 1 & + & \\ 8 & 1 & 4 & -1 & & + \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 7 & 4 & 1 & \cdot \frac{1}{7} \\ 0 & -7 & -4 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \cdot 7 \\ 0 & -7 & -4 & -1 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 1 & 0 & + \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \cdot (-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}x_3$
$x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3$
$x_3 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2.10

$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_1 = -1 + x_4$

$x_2 = 0 + 2x_3$

$x_3 \in \mathbb{R}$

$x_4 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2.11

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 2 & -3 & -2 & \cdot \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ll} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ 2 & 1 & 1 & + & \\ 3 & 2 & 1 & & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \\ 0 & 4 & 3 & \cdot \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{13}{2} & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \cdot(-\frac{13}{2}) \\ 0 & \frac{13}{2} & 4 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} & \cdot(-\frac{8}{7}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ll} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & & + \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & + & \\ 0 & 0 & 1 & \cdot(-\frac{3}{4}) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & + \\ 0 & 1 & 0 & \cdot \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Das System ist inkonsistent ($L = \{\,\}$).

Aufgabe 2.12

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & 2 & -1 & -15 & \cdot \frac{1}{3} \\ 5 & 3 & 2 & 0 & \\ 3 & 1 & 3 & 11 & \\ -6 & -4 & 2 & 30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|lll} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 & \cdot(-5) & \cdot(-3) & \cdot 6 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & + & & \\ 3 & 1 & 3 & 11 & & + & \\ -6 & -4 & 2 & 30 & & & + \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 25 & \cdot(-3) \\ 0 & -1 & 4 & 26 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 & \\ 0 & 1 & -11 & -75 & \\ 0 & -1 & 4 & 26 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 & \\ 0 & 1 & -11 & -75 & \\ 0 & 0 & -7 & -49 & \cdot(-\frac{1}{7}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ll} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 & & + \\ 0 & 1 & -11 & -75 & + & \\ 0 & 0 & 1 & 7 & \cdot 11 & \cdot \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{3} & + \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \cdot(-\frac{2}{3}) \\ 0 & 0 & 1 & 7 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Eine der vier Gleichungen ist eine Linearkombination der übrigen drei. Daher ist das Gleichungssystem konsistent und hat die Lösung $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$.

Aufgabe 2.13

(a) Da das System mehr Variablen als Gleichung besitzt, muss es nach Satz 1.2.1 nichttriviale Lösungen haben.

(b) Das System besitzt keine nichttriviale Lösungen.

Aufgabe 2.14

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdot(-2) \\ 2 & 1 & 3 & 0 & + \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \cdot \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & + \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 0 & 0 & + \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot(-2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.15

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \frac{1}{3} \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdot (-5) \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \cdot (-\frac{3}{8}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & + \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \cdot (-\frac{1}{3}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \end{array}$$

$$x_1 + \frac{1}{4}x_3 = 0$$
$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{4}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - x_4 \end{array}\right\} x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2.16

$$\begin{array}{ccc|l} 2 & 1 & 3 & \cdot 3 \\ 0 & -2 & 7 & \\ 3 & 4 & 5 & \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 6 & 3 & 9 & \cdot(-1) \\ 0 & -2 & 7 & \\ 6 & 8 & 10 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 6 & 3 & 9 & \\ 0 & -2 & 7 & \cdot 5 \\ 0 & 5 & 1 & \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 6 & 3 & 9 & \\ 0 & -10 & 35 & \\ 0 & 10 & 2 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 6 & 3 & 9 & \\ 0 & -10 & 35 & \cdot \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 37 & \cdot \frac{1}{37} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ll} 6 & 3 & 9 & & + \\ 0 & -2 & 7 & + & \\ 0 & 0 & 1 & \cdot(-7) & \cdot(-9) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 6 & 3 & 0 & \cdot 2 \\ 0 & -2 & 0 & \cdot 3 \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 12 & 6 & 0 & + \\ 0 & -6 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 12 & 0 & 0 & \cdot \frac{1}{12} \\ 0 & -6 & 0 & \cdot(-\frac{1}{6}) \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Aufgabe 2.17

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccll} 1 & 2 & -3 & 4 & \cdot(-3) & \cdot(-4) \\ 3 & -1 & 5 & 2 & + & \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 & & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 2 & -3 & 4 & \\ 0 & -7 & 14 & -10 & \cdot(-1) \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}$$

Da die Pivotelemente der ersten beiden Zeilen ungleich null sind, lassen sich diese Zeilen sicherlich auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen. Dehalb müssen wir das LGS nicht mehr weiter vereinfachen, da die Anzahl der Lösungen von der letzten Zeile abhängt.

$(a^2 - 16)z = a - 4$

- Keine Lösung, wenn $a^2 - 16 = 0$ und $a - 4 \neq 0 \Rightarrow a = -4$
- Unendlich viele Lösungen, wenn $a^2 - 16 = 0$ und $a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$
- Genau eine Lösung, wenn $a^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow a = \pm 4$

Aufgabe 2.18

Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn seine die Zeilen linear abhängig sind. Dies ist hier genau dann der Fall, wenn $\lambda = 4$ oder $\lambda = 2$.

Aufgabe 2.19

$f\colon y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Setzt man die Koordinaten der gegebenen Punkt in das Polynom (mit vertauschten Seiten) ein, so erhält man das folgende LGS:

$$\begin{aligned} d &= 10 \\ a + b + c + d &= 7 \\ 27a + 9b + 3c + d &= -11 \\ 64a + 16b + 4c + d &= -14 \end{aligned}$$

Um das LGS mit dem TI-30X zu lösen, können wir

(a) einen Gauss-Eliminationsschritt durchführen um unten rechts ein Teilsystem aus 3 Gleichungen mit 3 Unbenkannten zu erhalten und dessen Lösung dann in die erste Gleichung einsetzen oder

(b) den Wert $d = 10$ in die übrigen Gleichungen einsetzen, was hier gezeigt wird.

$$\begin{aligned} a + b + c + 10 &= 7 \\ 27a + 9b + 3c + 10 &= -11 \\ 64a + 16b + 4c + 10 &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= -3 \\ 27a + 9b + 3c &= -21 \\ 64a + 16b + 4c &= -28 \end{aligned}$$

TI-30X $\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$

Aufgabe 2.20

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ ac & ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$