

Komplexe Zahlen (Kapitel 5)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 5.1

Beschreibe die geometrische Wirkung von $f(z) = z + 3 - 4i$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 5.1

Translation um $3 + 4i$

Aufgabe 5.2

Beschreibe die geometrische Wirkung von $f(z) = -z$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 5.2

Spiegelung *am Ursprung*

Aufgabe 5.3

Beschreibe die geometrische Wirkung von $f(z) = \bar{z}$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 5.3

Spiegelung *an der reellen Achse*

Aufgabe 5.4

Beschreibe die geometrische Wirkung von $f(z) = -2z$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 5.4

Streckung mit dem Faktor -2 *am Ursprung*

oder:

Streckung *am Ursprung* mit Faktor 2 mit anschließender Spiegelung *am Ursprung*

Aufgabe 5.5

Beschreibe die geometrische Wirkung von $f(z) = (2 - i)z - 3 + 2i$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 5.5

Aufgabe 5.6

Gib die Gleichung einer komplexen Funktion an, welche die Punkte der komplexen Zahlenebene am Ursprung mit dem Faktor $\sqrt{3}$ streckt und anschliessend um $2 + 5i$ verschiebt.

Aufgabe 5.6

$$f(z) = \sqrt{3}z + 2 + 5i$$

Aufgabe 5.7

Gib eine Gleichung der komplexen Funktion an, welche die Punkte der komplexen Zahlenebene mit einer Drehstreckung am Ursprung mit dem Faktor 2 und dem Winkel $\varphi = 270^\circ$ abbildet.

Aufgabe 5.7

$$f(z) = -2iz$$

Aufgabe 5.8

Bestimme den Fixpunkt der Abbildung $f(z) = (2 + i)z + 1 - 3i$.

Aufgabe 5.8

$$z = (2 + i)z + 1 - 3i \quad [\text{Fixpunktbedingung}]$$

$$z - (2 + i)z = 1 - 3i$$

$$z[1 - (2 + i)]z = 1 - 3i$$

$$z(-1 - i)z = 1 - 3i$$

$$z = \frac{1 - 3i}{-1 - i} \quad [\text{mit } -1 \text{ erweitern}]$$

$$z = \frac{-1 + 3i}{1 + i} \quad [\text{mit } 1 - i \text{ erweitern}]$$

$$z = \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$$

$$z = \frac{-1 + i + 3i + 3}{1 + 1}$$

$$z = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

Aufgabe 5.9

Gib die Funktionsgleichung der Drehstreckung um das Zentrum $Z(0)$ mit dem Streckungsfaktor $\sqrt{2}$ und dem Drehwinkel 45° an.

Aufgabe 5.9

$$f(z) = (1 + i)z$$

Aufgabe 5.10

Gib die Funktionsgleichung der Drehstreckung um das Zentrum $S(2 - i)$ mit dem Streckungsfaktor $\sqrt{2}$ und dem Drehwinkel 45° an.

Aufgabe 5.10 (geometrische Lösung)

Zuerst wird z um $-(2 - i) = -2 + i$ verschoben. Dann kann die Drehung wie gewohnt um den Ursprung erfolgen. Zum Schluss ist die Verschiebung durch Addition von $2 - i$ wieder rückgängig zu machen:

$$\begin{aligned}f(z) &= (1 + i)(z - 2 + i) + 2 - i \\&= (1 + i)z + (1 + i)(-2 + i) + 2 - i \\&= (1 + i)z - 2 + i - 2i - 1 + 2 - i \\&= (1 + i)z - 1 - 2i\end{aligned}$$

Aufgabe 5.10 (algebraische Lösung)

Das Zentrum $z_0 = 2 - i$ der Drehstreckung ist der Fixpunkt der affinen Funktion. Ferner ist der Streckungsfaktor und der Drehwinkel in Form der komplexen Zahl $a = (1 + i)$ bekannt, denn $|a| = \sqrt{2}$ und $\arg(a) = 45^\circ$. Setzt man diese beiden Werte in die Fixpunktgleichung ein, kann man nach b auflösen.

$$z_0 = az_0 + b$$

$$2 - i = (1 + i)(2 - i) + b$$

$$b = 2 - i - (1 + i)(2 - i)$$

$$b = 2 - i - (2 - i + 2i + 1)$$

$$b = -1 - 2i$$

$$\text{Insgesamt: } f(z) = az + b = (1 + i)z - 1 - 2i$$