

## Aufgabe 4.1

(a)  $z_n = \frac{n+i}{n+1}$

- in Normalform:

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i \quad z_5 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}i$

$z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i \quad z_4 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}i \quad z_6 = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}i$

- Die Punkte streben gegen den Grenzwert 1. ( $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ )

(b)  $z_1 = 5 - 2i, z_{n+1} = z_n + 1 + 2i$

- in Normalform:

$z_1 = 6 \quad z_3 = 8 + 4i \quad z_5 = 10 + 8i$

$z_2 = 7 + 2i \quad z_4 = 9 + 6i \quad z_6 = 12 + 10i$

Die Punkte streben ins Unendliche. ( $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ )

(c)  $z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)i^n$

- in Normalform:

$z_1 = 3i \quad z_3 = -\frac{5}{3}i \quad z_5 = \frac{7}{5}i$

$z_2 = -2 \quad z_4 = \frac{3}{2} \quad z_6 = -\frac{4}{3}$

Die Folgenglieder streben gegen einen Zyklus der Länge 4 mit den Punkten  $1, i, -1, -i$ .

(d)  $z_1 = 2 + 2i, z_{n+1} = e^{\frac{\pi}{2}i} z_n$

- in Polarform: Die Multiplikation mit  $e^{\frac{\pi}{2}i}$  entspricht einer Drehung um den Ursprung mit dem Winkel  $\alpha = 90^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn.

$z_1 = -2 + 2i \quad z_3 = 2 - 2i \quad z_5 = 2 + 2i$

$z_2 = -2 - 2i \quad z_4 = 2 + 2i \quad z_6 = -2 + 2i$

Die Folgenglieder bilden einen Zyklus der Länge 4 mit den Punkten  $2 + 2i, -2 + 2i, -2 - 2i, 2 - 2i$ .

### Aufgabe 4.2

$$z_n = \left( \frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^n$$

$$\frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

Wer die letzte Umformung nicht im Kopf durchführen kann, rechnet den Betrag und das Argument der komplexen Zahl aus:

$$r = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right| = \sqrt{\left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\varphi = \arctan\left( \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \right) = \arctan(-1) = -45^\circ \hat{=} -\frac{\pi}{4}$$

Die Folgeglieder bilden einen Zyklus der Länge 8.

$$z_1 = e^{-\frac{\pi}{4}i}, z_2 = e^{-\frac{2\pi}{4}i}, \dots, z_8 = e^{-\frac{8\pi}{4}i}, z_9 = e^{-\frac{9\pi}{4}i} = e^{-\frac{\pi}{4}i} = z_1, \dots$$

### Aufgabe 4.3

Um eine Folge zu erzeugen für die  $z_1 = 2$  gilt und deren Glieder einen Zyklus der Länge 12 auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 beschreiben, muss jedes Folgeglied mit  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  um den Ursprung gedreht, also mit dem Faktor  $e^{\frac{\pi}{6}i}$  multipliziert werden.

$$\text{rekursive Definition: } z_1 = 2, z_{n+1} = z_n \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\text{explizite Definition: } z_n = 2 \left( e^{\frac{\pi}{6}i} \right)^{n-1}$$

### Aufgabe 4.4

Analog zu den reellen Ausdrücken der Form  $b^n$  konvergiert eine Folge der Form  $z^n$  in  $\mathbb{C}$ , wenn  $|z| < 1$  gilt.

$$\left| a + \frac{1}{2}i \right| < 1$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} < 1$$

$$a^2 + \frac{1}{4} < 1$$

$$a^2 < \frac{3}{4}$$

$$|a| < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Aufgabe 4.5

$$\text{Gegeben: } z_1 = -2, z_{n+1} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z_n$$

- (a) Damit die Folge einen Zyklus der Länge  $k = 12$  beschreibt, muss der Faktor  $\left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$  den Betrag 1 haben:

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + 2i \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ (ok)}$$

$$\text{Drehwinkel: } \varphi = \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Also gilt  $k = 12$ , denn  $12 \cdot \frac{\pi}{6} = 2\pi$ .

(b) Umfang des  $k$ -Ecks: Mit  $z_1 = -2$  und  $z_2 = -\sqrt{3} - i$  gilt:

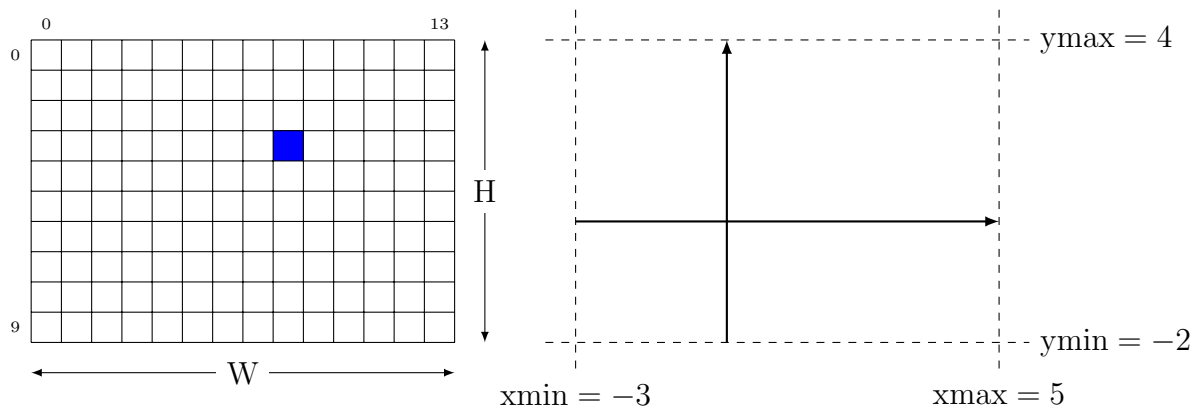
$$s = |z_1 - z_2| = |-2 - (-\sqrt{3} - i)| = |-2 + \sqrt{3} + i|$$

$$= \sqrt{(-2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1}$$

$$= \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4(2 - \sqrt{3})} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \text{Umfang } u = 12s = 24\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

### Aufgabe 4.6



$$x = -3 + \frac{8}{13} \cdot (5 - (-3)) = -3 + \frac{64}{13} = \frac{25}{13}$$

$$y = 4 - \frac{3}{9} \cdot (4 - (-2)) = 4 - 2 = 2$$