Komplexe Zahlen (Kapitel 4)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 4.1

Beantworte jeweils die folgenden Fragen zur Folge (z_n).

- Berechne die ersten 6 Glieder der Folge. Entscheide dabei, ob es geschickter ist, in Normalform oder in Polarform zu rechnen.
- Wie verhält sich die Folge, wenn n nach Unendlich strebt?

(a) $z_n = \dfrac{n+i}{n+1}$

(b) $z_1 = 5 - 2\mathrm{i}$, $z_{n+1} = z_n + 1 + 2\mathrm{i}$

(c) $z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \mathrm{i}^n$

(d) $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$, $z_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\, z_n$

Aufgabe 4.1

(a) $z_n = \dfrac{n+i}{n+1}$

- in Normalform:

  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \qquad z_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i} \qquad z_5 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\mathrm{i}$

  $z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i} \qquad z_4 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i} \qquad z_6 = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\mathrm{i}$

Aufgabe 4.1

(a) $z_n = \dfrac{n+i}{n+1}$

- in Normalform:

  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \qquad z_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i} \qquad z_5 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\mathrm{i}$

  $z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i} \qquad z_4 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i} \qquad z_6 = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\mathrm{i}$

- Die Punkte streben gegen den Grenzwert 1. ($\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$)

(b) $z_1 = 5 - 2\mathrm{i},\ z_{n+1} = z_n + 1 + 2\mathrm{i}$

- in Normalform:

$$z_1 = 6 \qquad z_3 = 8 + 4\mathrm{i} \qquad z_5 = 10 + 8\mathrm{i}$$

$$z_2 = 7 + 2\mathrm{i} \qquad z_4 = 9 + 6\mathrm{i} \qquad z_6 = 12 + 10\mathrm{i}$$

(b) $z_1 = 5 - 2\mathrm{i}$, $z_{n+1} = z_n + 1 + 2\mathrm{i}$

- in Normalform:

$z_1 = 6$ $\qquad z_3 = 8 + 4\mathrm{i}$ $\qquad z_5 = 10 + 8\mathrm{i}$

$z_2 = 7 + 2\mathrm{i}$ $\qquad z_4 = 9 + 6\mathrm{i}$ $\qquad z_6 = 12 + 10\mathrm{i}$

Die Punkte streben ins Unendliche. ($\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$)

(c) $z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)\mathrm{i}^n$

- in Normalform:

$$z_1 = 3\mathrm{i} \qquad z_3 = -\tfrac{5}{3}\mathrm{i} \qquad z_5 = \tfrac{7}{5}\mathrm{i}$$

$$z_2 = -2 \qquad z_4 = \tfrac{3}{2} \qquad z_6 = -\tfrac{4}{3}$$

(c) $z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)\mathrm{i}^n$

- in Normalform:

$$z_1 = 3\mathrm{i} \qquad z_3 = -\tfrac{5}{3}\mathrm{i} \qquad z_5 = \tfrac{7}{5}\mathrm{i}$$

$$z_2 = -2 \qquad z_4 = \tfrac{3}{2} \qquad z_6 = -\tfrac{4}{3}$$

Die Folgeglieder streben gegen einen Zyklus der Länge 4 mit den Punkten $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$.

(d) $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$, $z_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\, z_n$

- in Polarform: Die Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ entspricht einer Drehung um den Ursprung mit dem Winkel $\alpha = 90°$ im Gegenuhrzeigersinn.

  $z_1 = -2 + 2\mathrm{i}$ $\quad$ $z_3 = 2 - 2\mathrm{i}$ $\quad$ $z_5 = 2 + 2\mathrm{i}$

  $z_2 = -2 - 2\mathrm{i}$ $\quad$ $z_4 = 2 + 2\mathrm{i}$ $\quad$ $z_6 = -2 + 2\mathrm{i}$

(d) $z_1 = 2 + 2\mathrm{i},\ z_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} z_n$

- in Polarform: Die Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ entspricht einer Drehung um den Ursprung mit dem Winkel $\alpha = 90°$ im Gegenuhrzeigersinn.

  $$z_1 = -2 + 2\mathrm{i} \qquad z_3 = 2 - 2\mathrm{i} \qquad z_5 = 2 + 2\mathrm{i}$$

  $$z_2 = -2 - 2\mathrm{i} \qquad z_4 = 2 + 2\mathrm{i} \qquad z_6 = -2 + 2\mathrm{i}$$

  Die Folgeglieder bilden einen Zyklus der Länge 4 mit den Punkten $2 + 2\mathrm{i}, -2 + 2\mathrm{i}, -2 - 2\mathrm{i}, 2 - 2\mathrm{i}$.

Aufgabe 4.2

Beschreibe das Verhalten der Folge $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}\right)^n$ für n gegen Unendlich.

Hinweis: Bringe zuerst den Bruchterm in die Normalform.

Aufgabe 4.2

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}\right)^n$$

$$\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$$

Wer die letzte Umformung nicht im Kopf durchführen kann, rechnet den Betrag und das Argument der komplexen Zahl aus:

$$r = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}} = 1$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}\right) = \arctan(-1) = -45^\circ \mathrel{\widehat{=}} -\tfrac{\pi}{4}$$

Die Folgeglieder bilden einen Zyklus der Länge 8.

$$z_1 = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\ z_2 = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{4}\mathrm{i}},\ \ldots,\ z_8 = \mathrm{e}^{-\frac{8\pi}{4}\mathrm{i}},\ z_9 = \mathrm{e}^{-\frac{9\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = z_1, \ldots$$

Aufgabe 4.3

Gib die explizite und die rekursive Definition einer Folge mit $z_1 = 2$ an, welche einen Zyklus der Länge 12 beschreibt und deren Glieder auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 liegen.

Aufgabe 4.3

Um eine Folge zu erzeugen für die $z_1 = 2$ gilt und deren Glieder einen Zyklus der Länge 12 auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 beschreiben, muss jedes Folgeglied mit $\varphi = \frac{\pi}{6}$ um den Ursprung gedreht, also mit dem Faktor $e^{\frac{\pi}{6}i}$ multipliziert werden.

rekursive Definition: $z_1 = 2$, $z_{n+1} = z_n \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

explizite Definition: $z_n = 2\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{n-1}$

Aufgabe 4.4

Gegeben ist die Folge $z_n = \left(a + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n$.

Für welche reellen Werte von a besitzt (z_n) den Grenzwert 0?

Aufgabe 4.4

Analog zu den reellen Ausdrücken der Form b^n konvergiert eine Folge der Form z^n in $\mathbb{C}$, wenn $|z| < 1$ gilt.

Aufgabe 4.4

Analog zu den reellen Ausdrücken der Form b^n konvergiert eine Folge der Form z^n in $\mathbb{C}$, wenn $|z| < 1$ gilt.

$$\begin{aligned}
\left|a + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right| &< 1 \\
\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}} &< 1 \\
a^2 + \tfrac{1}{4} &< 1 \\
a^2 &< \tfrac{3}{4} \\
|a| &< \tfrac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.5

Gegeben ist die Folge $z_1 = -2$, $z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) z_n$.

(a) Zeige, dass (z_n) einen Zyklus beschreibt. Gib die Länge k des Zyklus an.

(b) Die Punkte des Zyklus bilden ein regelmässiges k-Eck. Berechne seinen Umfang.

Aufgabe 4.5

Gegeben: $z_1 = -2$, $z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) z_n$

(a) Damit die Folge einen Zyklus der Länge $k = 12$ beschreibt, muss der Faktor $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ den Betrag 1 haben:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ (ok)}$$

Aufgabe 4.5

Gegeben: $z_1 = -2$, $z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) z_n$

(a) Damit die Folge einen Zyklus der Länge $k = 12$ beschreibt, muss der Faktor $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ den Betrag 1 haben:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ (ok)}$$

Drewinkel: $\varphi = \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

Aufgabe 4.5

Gegeben: $z_1 = -2$, $z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) z_n$

(a) Damit die Folge einen Zyklus der Länge $k = 12$ beschreibt, muss der Faktor $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ den Betrag 1 haben:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ (ok)}$$

Drewinkel: $\varphi = \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

Also gilt $k = 12$, denn $12 \cdot \frac{\pi}{6} = 2\pi$.

Aufgabe 4.5

Gegeben: $z_1 = -2$, $z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) z_n$

(a) Damit die Folge einen Zyklus der Länge $k = 12$ beschreibt, muss der Faktor $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ den Betrag 1 haben:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ (ok)}$$

Drewinkel: $\varphi = \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

Also gilt $k = 12$, denn $12 \cdot \frac{\pi}{6} = 2\pi$.

(b) Umfang des k-Ecks: Mit $z_1 = -2$ und $z_2 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$ gilt:

$$s = |z_1 - z_2| = \left| -2 - (-\sqrt{3} - \mathrm{i})\right| = \left| -2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right|$$

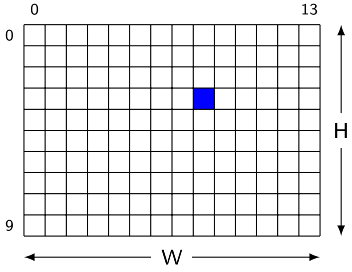
$$= \sqrt{(-2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1}$$

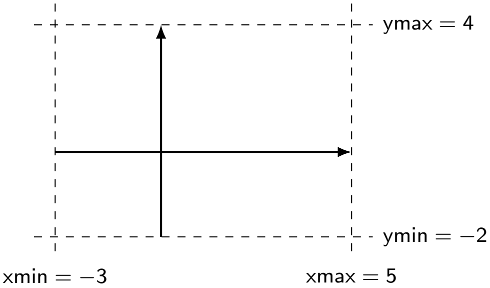
$$= \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4(2 - \sqrt{3})} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ Umfang $u = 12s = 24\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Aufgabe 4.6

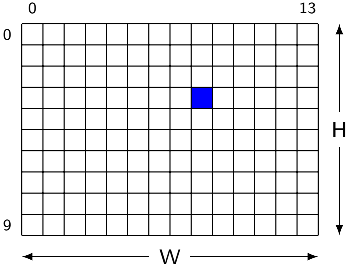
Berechne die Koordinaten des Pixels in der Zeile $i = 3$ und der Spalte $j = 8$ im einem Raster der Grösse 14×10 (Bild unten links) im Koordinatensystem mit den angegebenen Dimensionen (Bild unten rechts).

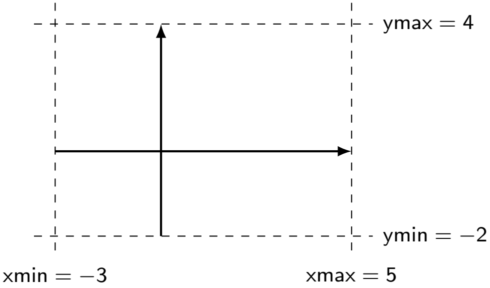




Beachte, dass die Indizes im Raster jeweils oben links mit der Nummer 0 beginnen.

Aufgabe 4.6





$$x = -3 + \frac{8}{13} \cdot (5 - (-3)) = -3 + \frac{64}{3} = \frac{25}{13}$$

$$y = 4 - \frac{3}{9} \cdot (4 - (-2)) = 4 - 2 = 2$$