Komplexe Zahlen (Kapitel 3)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 3.1

Löse die Gleichung $\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} = 8$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} = 8$$

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\ x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\ x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \\ x + 2x\mathrm{i} - 2y + 3x - 3\mathrm{i}y &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\
x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \\
x + 2x\mathrm{i} - 2y + 3x - 3\mathrm{i}y &= 8 \\
4x - 2y + 2x\mathrm{i} - 3y\mathrm{i} &= 8
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\
x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \\
x + 2x\mathrm{i} - 2y + 3x - 3\mathrm{i}y &= 8 \\
4x - 2y + 2x\mathrm{i} - 3y\mathrm{i} &= 8
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich: $4x - 2y = 8 \quad [1]$ Realteile

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\
x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \\
x + 2x\mathrm{i} - 2y + 3x - 3\mathrm{i}y &= 8 \\
4x - 2y + 2x\mathrm{i} - 3y\mathrm{i} &= 8
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $4x - 2y = 8$ [1] Realteile

$2x - 3y = 0$ [2] Imaginärteile

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\ x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \\ x + 2x\mathrm{i} - 2y + 3x - 3\mathrm{i}y &= 8 \\ 4x - 2y + 2x\mathrm{i} - 3y\mathrm{i} &= 8 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $4x - 2y = 8$ [1] Realteile

$2x - 3y = 0$ [2] Imaginärteile

$[1] - 2 \cdot [2]$: $4y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\ x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \\ x + 2x\mathrm{i} - 2y + 3x - 3\mathrm{i}y &= 8 \\ 4x - 2y + 2x\mathrm{i} - 3y\mathrm{i} &= 8 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $4x - 2y = 8$ [1] Realteile

$2x - 3y = 0$ [2] Imaginärteile

[1] $- 2 \cdot$ [2]: $4y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

[2]: $2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Aufgabe 3.1

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\
x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \\
x + 2x\mathrm{i} - 2y + 3x - 3\mathrm{i}y &= 8 \\
4x - 2y + 2x\mathrm{i} - 3y\mathrm{i} &= 8
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $4x - 2y = 8 \quad [1]$ Realteile

$2x - 3y = 0 \quad [2]$ Imaginärteile

$[1] - 2 \cdot [2]$: $4y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$[2]$: $2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$z = 3 + 2i$

Aufgabe 3.2

Löse die Gleichung $|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) = 1$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.2

$$|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) = 1 \quad \text{Ansatz: } z = x + \mathrm{i}y$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{i}x = 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \mathrm{i}x \quad ||^2$$

Aufgabe 3.2

$$
\begin{aligned}
|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) &= 1 \quad \text{Ansatz: } z = x + \mathrm{i}y \\
\sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{i}x &= 1 \\
\sqrt{x^2 + y^2} &= 1 - \mathrm{i}x \quad \|\,^2 \\
x^2 + y^2 &= 1 - 2\mathrm{i}x - x^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.2

$$
\begin{aligned}
|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) &= 1 \quad \text{Ansatz: } z = x + \mathrm{i}y \\
\sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{i}x &= 1 \\
\sqrt{x^2 + y^2} &= 1 - \mathrm{i}x \quad ||^{\,2} \\
x^2 + y^2 &= 1 - 2\mathrm{i}x - x^2 \\
2x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.2

$$
\begin{aligned}
|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) &= 1 \quad \text{Ansatz: } z = x + \mathrm{i}y \\
\sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{i}x &= 1 \\
\sqrt{x^2 + y^2} &= 1 - \mathrm{i}x \quad ||\,^2 \\
x^2 + y^2 &= 1 - 2\mathrm{i}x - x^2 \\
2x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Gleichung der Imaginärteile: $2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Aufgabe 3.2

$$
\begin{aligned}
|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) &= 1 \quad \text{Ansatz: } z = x + \mathrm{i}y \\
\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{i}x &= 1 \\
\sqrt{x^2+y^2} &= 1 - \mathrm{i}x \quad \|^2 \\
x^2 + y^2 &= 1 - 2\mathrm{i}x - x^2 \\
2x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Gleichung der Imaginärteile: $2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Gleichung der Realteile: $2x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad x = 0$ einsetzen

$$
\begin{aligned}
y^2 - 1 &= 0 \\
y &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.2

$$|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) = 1 \quad \text{Ansatz: } z = x + \mathrm{i}y$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{i}x = 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \mathrm{i}x \quad ||^2$$

$$x^2 + y^2 = 1 - 2\mathrm{i}x - x^2$$

$$2x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}x - 1 = 0$$

Gleichung der Imaginärteile: $2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Gleichung der Realteile: $2x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad x = 0$ einsetzen

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = \pm 1$$

$$z_{1,2} = \pm \mathrm{i}$$

Aufgabe 3.3

Löse die Gleichung $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.3

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{1-\mathrm{i}} \quad || \cdot (1+i)(1-i)z$$

$$(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) + (1-\mathrm{i})z = (z+\mathrm{i})z$$

$$1 - \mathrm{i}^2 = z\big((1+\mathrm{i}) - (1-\mathrm{i})\big)$$

$$2 = 2\mathrm{i}z$$

$$z = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.4

Löse die Gleichung $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.4

$$x^4 - 3x^2 - 4$$

Aufgabe 3.4

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

Aufgabe 3.4

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

Aufgabe 3.4

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

$$x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\mathrm{i},\ x_4 = \mathrm{i}$$

Aufgabe 3.5

Löse das Gleichungssystem mit den Variablen u und v in $\mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
3v + \mathrm{i}w &= 2 \\
\mathrm{i}v - w &= 4
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.5

$$3v + iw = 2 \qquad (1)$$
$$iv - w = 4 \quad (2)$$

Addiere das i-fache von (2) zu (1):

$$v - v = 2 + 4i$$
$$2v = 2 + 4i$$
$$v = 1 + 2i \quad (3)$$

Aufgabe 3.5

$$3v + \mathrm{i}w = 2 \qquad (1)$$
$$\mathrm{i}v - w = 4 \quad (2)$$

Addiere das i-fache von (2) zu (1):

$$\begin{aligned} v - v &= 2 + 4\mathrm{i} \\ 2v &= 2 + 4\mathrm{i} \\ v &= 1 + 2\mathrm{i} \quad (3) \end{aligned}$$

Setze (3) in (2) ein: $\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i}) - w = 4$

$$\mathrm{i} - 2 - 4 = w$$
$$w = -6 + \mathrm{i}$$

Aufgabe 3.5

$$3v + \mathrm{i}w = 2 \qquad (1)$$
$$\mathrm{i}v - w = 4 \quad (2)$$

Addiere das i-fache von (2) zu (1):

$$\begin{aligned} v - v &= 2 + 4\mathrm{i} \\ 2v &= 2 + 4\mathrm{i} \\ v &= 1 + 2\mathrm{i} \quad (3) \end{aligned}$$

Setze (3) in (2) ein: $\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i}) - w = 4$

$$\begin{aligned} \mathrm{i} - 2 - 4 &= w \\ w &= -6 + \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$(v, w) = (1 + 2\mathrm{i}, -6 + \mathrm{i})$$

Aufgabe 3.6

Löse die Gleichung $z^4 = 16\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.6

$$z^4 = 16\mathrm{i} = 16 \operatorname{cis} 90^\circ = 2^4 \operatorname{cis} 90^\circ$$

Aufgabe 3.6

$$z^4 = 16\mathrm{i} = 16 \operatorname{cis} 90^\circ = 2^4 \operatorname{cis} 90^\circ$$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4}\right) = 2 \operatorname{cis}(22.5^\circ)$$

Aufgabe 3.6

$$z^4 = 16\mathrm{i} = 16 \operatorname{cis} 90^\circ = 2^4 \operatorname{cis} 90^\circ$$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} \right) = 2 \operatorname{cis} (22.5^\circ)$$

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} \right) = 2 \operatorname{cis} (112.5^\circ)$$

Aufgabe 3.6

$$z^4 = 16\mathrm{i} = 16\,\mathrm{cis}\,90^\circ = 2^4\,\mathrm{cis}\,90^\circ$$

$$z_0 = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4}\right) = 2\,\mathrm{cis}\,(22.5^\circ)$$

$$z_1 = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4}\right) = 2\,\mathrm{cis}\,(112.5^\circ)$$

$$z_2 = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4}\right) = 2\,\mathrm{cis}\,(202.5^\circ)$$

Aufgabe 3.6

$$z^4 = 16\mathrm{i} = 16 \operatorname{cis} 90^\circ = 2^4 \operatorname{cis} 90^\circ$$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4}\right) = 2 \operatorname{cis}(22.5^\circ)$$

$$z_1 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4}\right) = 2 \operatorname{cis}(112.5^\circ)$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4}\right) = 2 \operatorname{cis}(202.5^\circ)$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4}\right) = 2 \operatorname{cis}(292.5^\circ)$$

Aufgabe 3.7

Löse die Gleichung $z^5 = 4 + 4\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.7

$$z^5 = 4 + 4\mathrm{i} = \sqrt{4^2 + 4^2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ = \sqrt{32}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$$

Aufgabe 3.7

$$z^5 = 4 + 4\mathrm{i} = \sqrt{4^2 + 4^2}\,\operatorname{cis} 45^\circ = \sqrt{32}\,\operatorname{cis} 45^\circ$$

$$z_0 = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}(9^\circ)$$

Aufgabe 3.7

$$z^5 = 4 + 4\mathrm{i} = \sqrt{4^2 + 4^2}\,\operatorname{cis} 45^\circ = \sqrt{32}\,\operatorname{cis} 45^\circ$$

$$z_0 = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}(9^\circ)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}(81^\circ)$$

Aufgabe 3.7

$$z^5 = 4 + 4\mathrm{i} = \sqrt{4^2 + 4^2}\,\operatorname{cis} 45^\circ = \sqrt{32}\,\operatorname{cis} 45^\circ$$

$$z_0 = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}(9^\circ)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}(81^\circ)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}(153^\circ)$$

Aufgabe 3.7

$$z^5 = 4 + 4\mathrm{i} = \sqrt{4^2 + 4^2}\,\operatorname{cis} 45^\circ = \sqrt{32}\,\operatorname{cis} 45^\circ$$

$$z_0 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}(9^\circ)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}(81^\circ)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}(153^\circ)$$

$$z_3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{45^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}(225^\circ)$$

Aufgabe 3.7

$$z^5 = 4 + 4\mathrm{i} = \sqrt{4^2 + 4^2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ = \sqrt{32}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$$

$$z_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{45^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}(9^\circ)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{45^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}(81^\circ)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{45^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}(153^\circ)$$

$$z_3 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{45^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}(225^\circ)$$

$$z_4 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{45^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{5}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}(297^\circ)$$

Aufgabe 3.8

Löse die Gleichung $z^2 - 2\mathrm{i}z - 10 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.8

$$z^2 - 2\mathrm{i}z - 10 = 0$$

Aufgabe 3.8

$$z^2 - 2iz - 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = -4 + 40 = 36$$

Aufgabe 3.8

$$z^2 - 2\mathrm{i}z - 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2\mathrm{i})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = -4 + 40 = 36$$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\mathrm{i} + 6}{2} = 3 + 2\mathrm{i}$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\mathrm{i} - 6}{2} = -3 + 2\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.9

Löse die Gleichung $z^2 - (6 + 2\mathrm{i})z + (11 - 10\mathrm{i}) = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.9

$$z^2 - (6 - 2\mathrm{i})z + (11 - 10\mathrm{i}) = 0$$

Aufgabe 3.9

$$z^2 - (6 - 2i)z + (11 - 10i) = 0$$

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -(6 - 2i)\ c = 11 - 10i$

Aufgabe 3.9

$$z^2 - (6 - 2\mathrm{i})z + (11 - 10\mathrm{i}) = 0$$

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -(6 - 2\mathrm{i})\ c = 11 - 10\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 - 4ac = (6 - 2\mathrm{i})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (11 - 10\mathrm{i}) \\ &= 32 - 24\mathrm{i} - 44 + 40\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.9

$$z^2 - (6 - 2\mathrm{i})z + (11 - 10\mathrm{i}) = 0$$

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -(6 - 2\mathrm{i})\ c = 11 - 10\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 - 4ac = (6 - 2\mathrm{i})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (11 - 10\mathrm{i}) \\ &= 32 - 24\mathrm{i} - 44 + 40\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ansatz: $d^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i}$

Aufgabe 3.9

$$z^2 - (6-2\mathrm{i})z + (11-10\mathrm{i}) = 0$$

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -(6-2\mathrm{i})\ c = 11 - 10\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 - 4ac = (6-2\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1 \cdot (11-10\mathrm{i}) \\ &= 32 - 24\mathrm{i} - 44 + 40\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ansatz: $d^2 = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i}$

Koeffizientenvergleich: $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -12 \\ 2xy &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} d_1 &= 2 + 4\mathrm{i} \\ d_2 &= -2 - 4\mathrm{i} \end{aligned}$

Aufgabe 3.9

$$z^2 - (6-2\mathrm{i})z + (11-10\mathrm{i}) = 0$$

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -(6-2\mathrm{i})\ c = 11-10\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} d^2 = b^2 - 4ac &= (6-2\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1\cdot(11-10\mathrm{i}) \\ &= 32 - 24\mathrm{i} - 44 + 40\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ansatz: $d^2 = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i}$

Koeffizientenvergleich: $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -12 \\ 2xy &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} d_1 &= 2 + 4\mathrm{i} \\ d_2 &= -2 - 4\mathrm{i} \end{aligned}$

$$z_1 = \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 - 2\mathrm{i} + 2 + 4\mathrm{i}}{2} = 4 + \mathrm{i}$$

Aufgabe 3.9

$$z^2 - (6-2\mathrm{i})z + (11-10\mathrm{i}) = 0$$

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -(6-2\mathrm{i})\ c = 11 - 10\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 - 4ac = (6-2\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1\cdot(11-10\mathrm{i}) \\ &= 32 - 24\mathrm{i} - 44 + 40\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ansatz: $d^2 = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i}$

Koeffizientenvergleich: $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -12 \\ 2xy &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} d_1 &= 2 + 4\mathrm{i} \\ d_2 &= -2 - 4\mathrm{i} \end{aligned}$

$$z_1 = \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 - 2\mathrm{i} + 2 + 4\mathrm{i}}{2} = 4 + \mathrm{i}$$

$$z_2 = \frac{-b + d_2}{2a} = \frac{6 - 2\mathrm{i} - 2 - 4\mathrm{i}}{2} = 2 - 3\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.10

Löse die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = -2$$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = -2$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = -2$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = -2$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = -1$$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = -2$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = -1$$

Aufgabe 3.10

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 2$$

reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = -2$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = -1$$

Aufgabe 3.11

Löse die Gleichung $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.11

normierte Form: $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

Aufgabe 3.11

normierte Form: $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

$r = 6,\ s = 4,\ t = -8$

Aufgabe 3.11

normierte Form: $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

$r = 6,\ s = 4,\ t = -8$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -8$$

Aufgabe 3.11

normierte Form: $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

$r = 6,\ s = 4,\ t = -8$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -8$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 0$$

Aufgabe 3.11

normierte Form: $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

$r = 6,\ s = 4,\ t = -8$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -8$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 0$$

reduzierte Form: $y^3 - 8y = 0$

Kann ab jetzt ohne Hilfe der Formelsammlung gelöst werden:

$$y(y^2 - 8) = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$y_{2,3} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

Dennoch: Rücksubstitution nicht vergessen:

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = 0 - 2 = -2$$

Aufgabe 3.11

normierte Form: $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

$r = 6,\ s = 4,\ t = -8$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -8$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 0$$

reduzierte Form: $y^3 - 8y = 0$

Kann ab jetzt ohne Hilfe der Formelsammlung gelöst werden:

$$y(y^2 - 8) = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$y_{2,3} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

Dennoch: Rücksubstitution nicht vergessen:

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = 0 - 2 = -2$$

Aufgabe 3.11

normierte Form: $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

$r = 6,\ s = 4,\ t = -8$

$p = s - \frac{r^2}{3} = -8$

$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 0$

reduzierte Form: $y^3 - 8y = 0$

Kann ab jetzt ohne Hilfe der Formelsammlung gelöst werden:

$$y(y^2 - 8) = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$y_{2,3} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

Dennoch: Rücksubstitution nicht vergessen:

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = 0 - 2 = -2$$

Aufgabe 3.12

Löse die Gleichung $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.12

allgemeine Form: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$

Aufgabe 3.12

allgemeine Form: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$$r = \frac{b}{a} = -\frac{3}{2},\ s = \frac{c}{a} = 3,\ t = \frac{d}{a} = -\frac{9}{2}$$

Aufgabe 3.12

allgemeine Form: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$$r = \frac{b}{a} = -\frac{3}{2},\ s = \frac{c}{a} = 3,\ t = \frac{d}{a} = -\frac{9}{2}$$

normierte Form: $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0$

Aufgabe 3.12

allgemeine Form: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$$r = \frac{b}{a} = -\frac{3}{2},\ s = \frac{c}{a} = 3,\ t = \frac{d}{a} = -\frac{9}{2}$$

normierte Form: $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = \frac{9}{4}$$

Aufgabe 3.12

allgemeine Form: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$$r = \frac{b}{a} = -\frac{3}{2},\ s = \frac{c}{a} = 3,\ t = \frac{d}{a} = -\frac{9}{2}$$

normierte Form: $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = \frac{9}{4}$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = -\frac{13}{4}$$

Aufgabe 3.12

allgemeine Form: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$$r = \frac{b}{a} = -\frac{3}{2},\ s = \frac{c}{a} = 3,\ t = \frac{d}{a} = -\frac{9}{2}$$

normierte Form: $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = \frac{9}{4}$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = -\frac{13}{4}$$

reduzierte Form: $y^3 + \frac{9}{4}y - \frac{13}{4} = 0$

Aufgabe 3.12

allgemeine Form: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$$r = \frac{b}{a} = -\frac{3}{2},\ s = \frac{c}{a} = 3,\ t = \frac{d}{a} = -\frac{9}{2}$$

normierte Form: $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = \frac{9}{4}$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = -\frac{13}{4}$$

reduzierte Form: $y^3 + \frac{9}{4}y - \frac{13}{4} = 0$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$u = \frac{3}{2}$$

$$u = \frac{3}{2}$$

$$v = -\frac{1}{2}$$

$$u = \frac{3}{2}$$

$$v = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = u + v = 1$$

$$u = \frac{3}{2}$$

$$v = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = u + v = 1$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$u = \frac{3}{2}$$

$$v = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = u + v = 1$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$u = \frac{3}{2}$$

$$v = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = u + v = 1$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \frac{3}{2}$$

$$u = \frac{3}{2}$$

$$v = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = u + v = 1$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$u = \frac{3}{2}$$

$$v = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = u + v = 1$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$x_3 = y_3 - \frac{r}{3} = -\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.13

Löse die Gleichung $x^3 - 12x + 8$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.13

normierte Form: $x^3 - 12x + 8 = 0$

die Gleichung ist bereits in reduzierter Form mit $p = -12$ *und* $q = 8$

Aufgabe 3.13

normierte Form: $x^3 - 12x + 8 = 0$

die Gleichung ist bereits in reduzierter Form mit $p = -12$ *und* $q = 8$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -11$$

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2\varrho}\right) = \arccos\left(-\frac{8}{2 \cdot 8}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2\varrho}\right) = \arccos\left(-\frac{8}{2\cdot 8}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

$$x_1 = 2\cdot\sqrt[3]{\varrho}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 2\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\cos\left(\frac{120^\circ}{3}\right) = 4\cos\left(40^\circ\right)$$

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2\varrho}\right) = \arccos\left(-\frac{8}{2 \cdot 8}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 2 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \cos\left(\frac{120^\circ}{3}\right) = 4\cos\left(40^\circ\right)$$

$$x_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) = 4\cos\left(160^\circ\right)$$

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2\varrho}\right) = \arccos\left(-\frac{8}{2\cdot 8}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

$$x_1 = 2\cdot\sqrt[3]{\varrho}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 2\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\cos\left(\frac{120^\circ}{3}\right) = 4\cos(40^\circ)$$

$$x_2 = 2\cdot\sqrt[3]{\varrho}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) = 4\cos(160^\circ)$$

$$x_3 = 2\cdot\sqrt[3]{\varrho}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) = 4\cos(280^\circ)$$