

# Komplexe Zahlen (Kapitel 2)

## Prüfungsvorbereitung

## Aufgabe 2.1

Stelle die komplexe Zahl in der Polarform  $r \operatorname{cis}(\varphi)$  mit  $0 \leq \varphi < 360^\circ$  dar.

(a)  $5i$

(b)  $-4 + 4i$

(c)  $-2\sqrt{3} - 6i$

(d)  $3 - \sqrt{3}i$

## Aufgabe 2.1

(a)  $z = 5i = 5 \operatorname{cis}(90^\circ)$

## Aufgabe 2.1

(a)  $z = 5i = 5 \operatorname{cis}(90^\circ)$

(b)  $z = -4 + 4i$

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

## Aufgabe 2.1

(a)  $z = 5i = 5 \operatorname{cis}(90^\circ)$

(b)  $z = -4 + 4i$

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\arg(z) &= \arctan\left(-\frac{4}{4}\right) + 180^\circ = -\arctan(1) + 180^\circ \\ &= -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

## Aufgabe 2.1

(a)  $z = 5i = 5 \operatorname{cis}(90^\circ)$

(b)  $z = -4 + 4i$

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \arctan\left(-\frac{4}{4}\right) + 180^\circ = -\arctan(1) + 180^\circ$$

$$= -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$

$$z = 4\sqrt{2} \operatorname{cis}(135^\circ)$$

(c)  $z = -2\sqrt{3} - 6i$

$$|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-6)^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$(c) \quad z = -2\sqrt{3} - 6i$$

$$|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-6)^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \arg(z) &= \arctan\left(\frac{6}{2\sqrt{3}}\right) + 180^\circ = \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + 180^\circ \\ &= \arctan(\sqrt{3}) + 180^\circ = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ \end{aligned}$$

$$(c) \quad z = -2\sqrt{3} - 6i$$

$$|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-6)^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{6}{2\sqrt{3}}\right) + 180^\circ = \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + 180^\circ$$

$$= \arctan(\sqrt{3}) + 180^\circ = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$$

$$z = 4\sqrt{3} \operatorname{cis}(240^\circ)$$

(d)  $3 - \sqrt{3}i$

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$(d) 3 - \sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\arg(z) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -30^\circ$$

$$(d) 3 - \sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\arg(z) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -30^\circ$$

$$z = 2\sqrt{3} \operatorname{cis}(330^\circ)$$

## Aufgabe 2.2

Stelle die komplexe Zahl in der Normalform dar.

(a)  $5.7 \operatorname{cis}(\pi)$

(b)  $3 \operatorname{cis}(225^\circ)$

(c)  $4 \operatorname{cis}(5\pi/6)$

(d)  $6\sqrt{3} \operatorname{cis}(300^\circ)$

## Aufgabe 2.2

(a)  $5.7 \operatorname{cis}(\pi) = 5.7 \cdot (-1) = -5.7$

## Aufgabe 2.2

$$(a) \quad 5.7 \operatorname{cis}(\pi) = 5.7 \cdot (-1) = -5.7$$

$$\begin{aligned}(b) \quad 3 \operatorname{cis}(225^\circ) &= 3 \cos(225^\circ) + 3 \sin(225^\circ) \\ &= 3 \cos(130^\circ + 45^\circ) + 3 \sin(180^\circ + 45^\circ) \\ &= -3 \cos(45^\circ) - 3i \sin(45^\circ) \\ &= -3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad 4 \operatorname{cis}(5\pi/6) &= 4 \cos(150^\circ) \\ &= 4 \cos(180^\circ - 30^\circ) + 4i \sin(180^\circ - 30^\circ) \\ &= -4 \cos(30^\circ) + 4i \sin(30^\circ) = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4i \cdot \frac{1}{2} \\ &= -2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

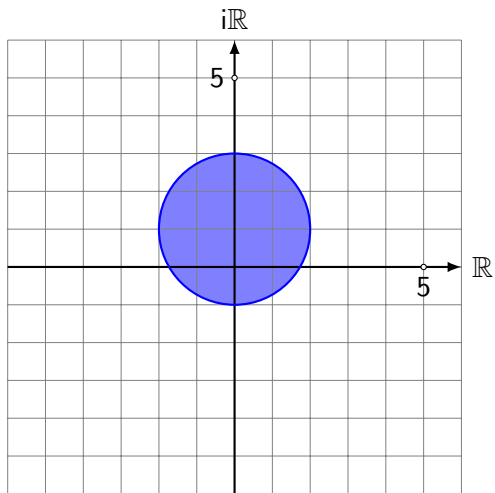
$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad 4 \operatorname{cis}(5\pi/6) &= 4 \cos(150^\circ) \\ &= 4 \cos(180^\circ - 30^\circ) + 4i \sin(180^\circ - 30^\circ) \\ &= -4 \cos(30^\circ) + 4i \sin(30^\circ) = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4i \cdot \frac{1}{2} \\ &= -2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad 6\sqrt{3} \operatorname{cis}(300^\circ) &= 6\sqrt{3} \cos(360^\circ - 60^\circ) + 6\sqrt{3}i \sin(360^\circ - 60^\circ) \\ &= -6\sqrt{3} \cos(60^\circ) + 6\sqrt{3}i \sin(60^\circ) \\ &= -6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 6\sqrt{3}i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} - 9i \end{aligned}$$

## Aufgabe 2.3

Skizziere die Menge  $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2\}$  in der gaußschen Zahlenebene.

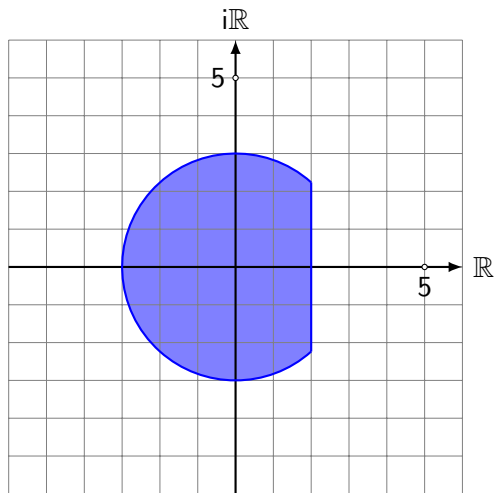
## Aufgabe 2.3



## Aufgabe 2.4

Skizziere die Menge  $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) \leq 2 \text{ und } |z| \leq 3\}$  in der gaußschen Zahlenebene.

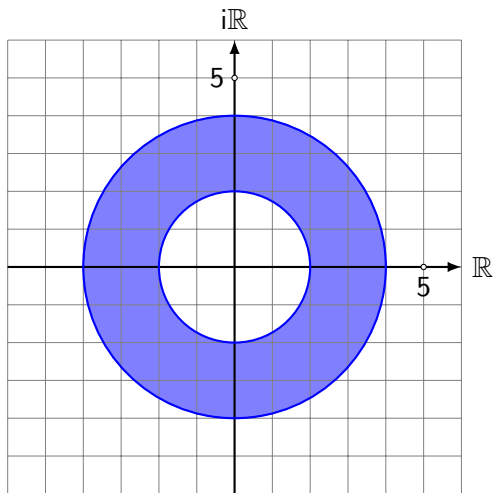
## Aufgabe 2.4



## Aufgabe 2.5

Skizziere die Menge  $\{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z| \leq 4\}$  in der gaußschen Zahlenebene.

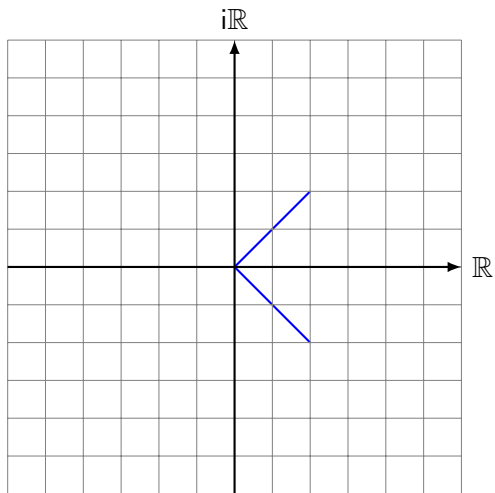
## Aufgabe 2.5



## Aufgabe 2.6

Skizziere die Menge  $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| = 45^\circ \wedge |z| \leq 2\sqrt{2}\}$  in der gaußschen Zahlenebene.

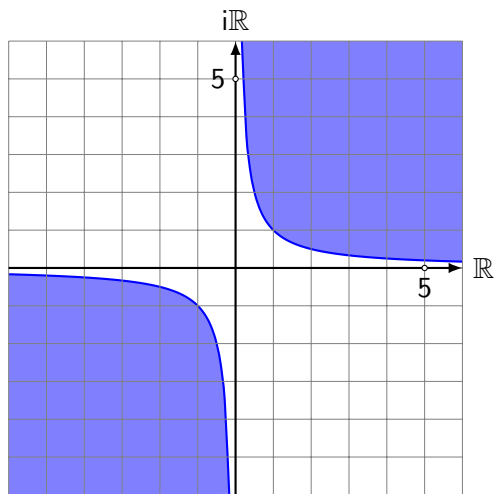
## Aufgabe 2.6



## Aufgabe 2.7

Skizziere die Menge  $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1\}$  in der gaußschen Zahlenebene.

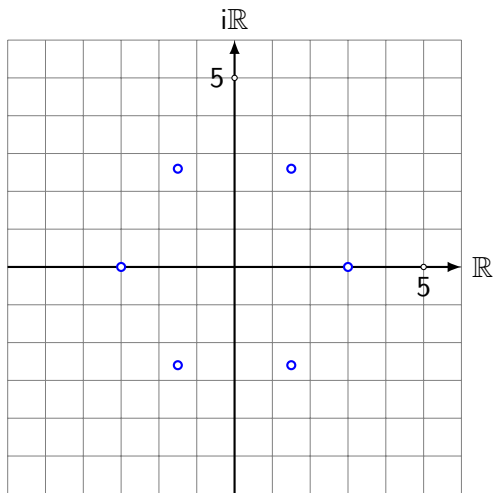
## Aufgabe 2.7



## Aufgabe 2.8

Skizziere die Menge  $\{3 \operatorname{cis}(k \cdot 60^\circ) : k \in \mathbb{Z}\}$  in der gaußschen Zahlenebene.

## Aufgabe 2.8



## Aufgabe 2.9

Gib das Resultat in der Polarform mit  $0^\circ \leq \arg(z) < 360^\circ$  an.

(a)  $4 \operatorname{cis} 20^\circ \cdot 5 \operatorname{cis} 30^\circ$

(c)  $(\sqrt{2} \operatorname{cis} 40^\circ)^{10}$

(b)  $9 \operatorname{cis} 40^\circ : 2 \operatorname{cis} 70^\circ$

(d)  $(\operatorname{cis} 12^\circ)^{15} \cdot (\operatorname{cis} 15^\circ)^{12}$

## Aufgabe 2.9

(a)  $4 \operatorname{cis} 20^\circ \cdot 5 \operatorname{cis} 30^\circ = 20 \operatorname{cis} 50^\circ$

## Aufgabe 2.9

(a)  $4 \operatorname{cis} 20^\circ \cdot 5 \operatorname{cis} 30^\circ = 20 \operatorname{cis} 50^\circ$

(b)  $9 \operatorname{cis} 40^\circ : 2 \operatorname{cis} 70^\circ = 4.5 \operatorname{cis}(-30^\circ) = 4.5 \operatorname{cis} 330^\circ$

## Aufgabe 2.9

(a)  $4 \operatorname{cis} 20^\circ \cdot 5 \operatorname{cis} 30^\circ = 20 \operatorname{cis} 50^\circ$

(b)  $9 \operatorname{cis} 40^\circ : 2 \operatorname{cis} 70^\circ = 4.5 \operatorname{cis}(-30^\circ) = 4.5 \operatorname{cis} 330^\circ$

(c)  $(\sqrt{2} \operatorname{cis} 40^\circ)^{10} = \sqrt{2}^{10} \operatorname{cis} 400^\circ = 2^5 \operatorname{cis} 40^\circ = 32 \operatorname{cis} 40^\circ$

## Aufgabe 2.9

(a)  $4 \operatorname{cis} 20^\circ \cdot 5 \operatorname{cis} 30^\circ = 20 \operatorname{cis} 50^\circ$

(b)  $9 \operatorname{cis} 40^\circ : 2 \operatorname{cis} 70^\circ = 4.5 \operatorname{cis}(-30^\circ) = 4.5 \operatorname{cis} 330^\circ$

(c)  $(\sqrt{2} \operatorname{cis} 40^\circ)^{10} = \sqrt{2}^{10} \operatorname{cis} 400^\circ = 2^5 \operatorname{cis} 40^\circ = 32 \operatorname{cis} 40^\circ$

(d)  $(\operatorname{cis} 12^\circ)^{15} \cdot (\operatorname{cis} 15^\circ)^{12} = \operatorname{cis} 180^\circ \cdot \operatorname{cis} 180^\circ = \operatorname{cis} 360^\circ = 1$

## Aufgabe 2.10

Gib das Resultat in der Polarform mit  $0 \leq \arg(z) < 2\pi$  an.

(a)  $\operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$

(b)  $\operatorname{cis}^{-5} \left( -\frac{2\pi}{3} \right)$

(c)  $\prod_{k=1}^{10} \operatorname{cis} \frac{k\pi}{4}$

## Aufgabe 2.10

$$(a) \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{cis} \frac{13\pi}{6} = \operatorname{cis} \left( \frac{13\pi}{6} - 2\pi \right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

## Aufgabe 2.10

$$(a) \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{cis} \frac{13\pi}{6} = \operatorname{cis} \left( \frac{13\pi}{6} - 2\pi \right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

$$(b) \operatorname{cis}^{-5} \left( -\frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{cis} \frac{10\pi}{3} = \operatorname{cis} \left( \frac{10\pi}{3} - 2\pi \right) = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$$

## Aufgabe 2.10

$$(a) \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{cis} \frac{13\pi}{6} = \operatorname{cis} \left( \frac{13\pi}{6} - 2\pi \right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

$$(b) \operatorname{cis}^{-5} \left( -\frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{cis} \frac{10\pi}{3} = \operatorname{cis} \left( \frac{10\pi}{3} - 2\pi \right) = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$$

$$(c) \prod_{k=1}^{10} \operatorname{cis} \frac{k\pi}{4} = \operatorname{cis} \frac{(1+2+\dots+10)\pi}{4} = \operatorname{cis} \frac{55\pi}{4} = \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$$

## Aufgabe 2.11

Vereinfache die Terme

(a)  $\operatorname{cis} \varphi \cdot \operatorname{cis}(-\varphi)$

(b)  $\operatorname{cis} \varphi - \operatorname{cis}(-\varphi)$

## Aufgabe 2.11

$$(a) \operatorname{cis} \varphi \cdot \operatorname{cis}(-\varphi) = \operatorname{cis} [\varphi + (-\varphi)] = \operatorname{cis} 0 = 1$$

## Aufgabe 2.11

$$(a) \operatorname{cis} \varphi \cdot \operatorname{cis}(-\varphi) = \operatorname{cis} [\varphi + (-\varphi)] = \operatorname{cis} 0 = 1$$

$$\begin{aligned}(b) \operatorname{cis} \varphi - \operatorname{cis}(-\varphi) &= [\cos \varphi + i \sin \varphi] - [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] \\ &= [\cos \varphi + i \sin \varphi] - [\cos \varphi - i \sin \varphi] \\ &= 2i \sin \varphi\end{aligned}$$

## Aufgabe 2.12

Vereinfache den Ausdruck und stelle das Resultat in der Polarform mit  $0 \leq \varphi < 360^\circ$  dar.

(a)  $(\cos 25^\circ - i \sin 25^\circ)(\cos 35^\circ - i \sin 35^\circ)$

(b)  $\frac{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}{\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ}$

## Aufgabe 2.12

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & (\cos 25^\circ - i \sin 25^\circ)(\cos 35^\circ - i \sin 35^\circ) \\ &= (\cos(-25^\circ) + i \sin(-25^\circ))(\cos(-35^\circ) + i \sin(-35^\circ)) \\ &= \operatorname{cis}(-25^\circ) \operatorname{cis}(-35^\circ) = \operatorname{cis}(-60^\circ) \\ &= \operatorname{cis}(-60^\circ + 360^\circ) = \operatorname{cis} 300^\circ \end{aligned}$$

## Aufgabe 2.12

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & (\cos 25^\circ - i \sin 25^\circ)(\cos 35^\circ - i \sin 35^\circ) \\ &= (\cos(-25^\circ) + i \sin(-25^\circ))(\cos(-35^\circ) + i \sin(-35^\circ)) \\ &= \operatorname{cis}(-25^\circ) \operatorname{cis}(-35^\circ) = \operatorname{cis}(-60^\circ) \\ &= \operatorname{cis}(-60^\circ + 360^\circ) = \operatorname{cis} 300^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \frac{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}{\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ} = \frac{\operatorname{cis} 40^\circ}{\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)} \\ &= \frac{\operatorname{cis} 40^\circ}{\operatorname{cis}(-30^\circ)} = \operatorname{cis} 70^\circ \end{aligned}$$

## Aufgabe 2.13

Drücke  $\sin 2\varphi$  und  $\cos 2\varphi$  durch Potenzen von  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  aus.  
Verwende dazu die Formel von DE MOIVRE.

## Aufgabe 2.13

$$\operatorname{cis} 2\varphi = (\operatorname{cis} \varphi)^2$$

$$\operatorname{cis} 2\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + i \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

Durch den Vergleich von Real- und Imaginärteil erhält man:

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

## Aufgabe 2.14

Vereinfache.

(a)  $3e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(b)  $3e^{i\frac{17\pi}{5}} : 2e^{i\frac{12\pi}{5}}$

(c)  $(e^{-i\frac{3\pi}{2}})^4$

## Aufgabe 2.14

$$(a) \quad 3e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$$

## Aufgabe 2.14

$$(a) \quad 3e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$$

$$(b) \quad 3e^{i\frac{17\pi}{5}} : 2e^{i\frac{12\pi}{5}} = 1.5e^{i(\frac{17\pi}{5} - \frac{12\pi}{5})} = 1.5e^{i\pi} = -1.5$$

## Aufgabe 2.14

$$(a) \quad 3e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$$

$$(b) \quad 3e^{i\frac{17\pi}{5}} : 2e^{i\frac{12\pi}{5}} = 1.5e^{i(\frac{17\pi}{5} - \frac{12\pi}{5})} = 1.5e^{i\pi} = -1.5$$

$$(c) \quad (e^{-i\frac{3\pi}{2}})^4 = e^{-i\frac{12\pi}{2}} = e^{i2\pi} = 1$$

## Aufgabe 2.15

Stelle die komplexe Zahl in der Normalform dar.

(a)  $i^i$

(b)  $\sqrt{i}$

(c)  $\ln(1 + i)$

## Aufgabe 2.15

$$(a) \quad i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}$$

## Aufgabe 2.15

$$(a) \quad i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}$$

$$(b) \quad \sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + i \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\pi}{4}$$

## Aufgabe 2.15

$$(a) \quad i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}$$

$$(b) \quad \sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + i \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\pi}{4}$$

$$(c) \quad \ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) = \ln(\sqrt{2}) + \ln(e^{i\pi/4}) = \ln(\sqrt{2}) + i \frac{\pi}{4}$$