Komplexe Zahlen (Kapitel 1)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1.1

Berechne ohne Taschenrechner für $z = \mathrm{i}$ den Wert der Ausdrücke in der Normalform.

(a) z^2

(b) z^3

(c) $1/z$

(d) $z + z^2$

(e) $\overline{z}$

(f) $|z|$

Aufgabe 1.1

$z = \mathrm{i}$:

(a) $z^2 = -1$

Aufgabe 1.1

$z = \mathrm{i}$:

(a) $z^2 = -1$

(b) $z^3 = -\mathrm{i}$

Aufgabe 1.1

$z = \mathrm{i}$:

(a) $z^2 = -1$

(b) $z^3 = -\mathrm{i}$

(c) $1/z = -\mathrm{i}$

Aufgabe 1.1

$z = \mathrm{i}$:

(a) $z^2 = -1$
(b) $z^3 = -\mathrm{i}$
(c) $1/z = -\mathrm{i}$
(d) $z + z^2 = -1 + \mathrm{i}$

Aufgabe 1.1

$z = \mathrm{i}$:

(a) $z^2 = -1$
(b) $z^3 = -\mathrm{i}$
(c) $1/z = -\mathrm{i}$
(d) $z + z^2 = -1 + \mathrm{i}$
(e) $\overline{z} = -\mathrm{i}$

Aufgabe 1.1

$z = \mathrm{i}$:

(a) $z^2 = -1$

(b) $z^3 = -\mathrm{i}$

(c) $1/z = -\mathrm{i}$

(d) $z + z^2 = -1 + \mathrm{i}$

(e) $\overline{z} = -\mathrm{i}$

(f) $|z| = 1$

Aufgabe 1.2

Berechne ohne Taschenrechner für $z = 2 - \mathrm{i}$ den Wert der Ausdrücke in der Normalform.

(a) z^2

(b) z^3

(c) $1/z$

(d) $z + z^2$

(e) $\overline{z}$

(f) $|z|$

Aufgabe 1.2

$z = 2 - \mathrm{i}$

(a) $z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$

Aufgabe 1.2

$z = 2 - \mathrm{i}$

(a) $z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$

(b) $z^3 = 2 - 11\mathrm{i}$

Aufgabe 1.2

$z = 2 - \mathrm{i}$

(a) $z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$

(b) $z^3 = 2 - 11\mathrm{i}$

(c) $1/z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$

Aufgabe 1.2

$z = 2 - \mathrm{i}$

(a) $z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$
(b) $z^3 = 2 - 11\mathrm{i}$
(c) $1/z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$
(d) $z + z^2 = 5 - 5\mathrm{i}$

Aufgabe 1.2

$z = 2 - \mathrm{i}$

(a) $z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$
(b) $z^3 = 2 - 11\mathrm{i}$
(c) $1/z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$
(d) $z + z^2 = 5 - 5\mathrm{i}$
(e) $\overline{z} = 2 + \mathrm{i}$

Aufgabe 1.2

$z = 2 - \mathrm{i}$

(a) $z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$

(b) $z^3 = 2 - 11\mathrm{i}$

(c) $1/z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$

(d) $z + z^2 = 5 - 5\mathrm{i}$

(e) $\overline{z} = 2 + \mathrm{i}$

(f) $|z| = \sqrt{5}$

Aufgabe 1.3

Berechne ohne Taschenrechner die Ausdrücke für $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = 4 + 5\mathrm{i}$ und stelle das Resultat in der Normalform dar.

(a) $\overline{z_1} - \overline{z_2}$

(b) $\overline{z_1 - z_2}$

(c) $\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2)$

(d) $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2)$

(e) $z_1 \cdot \overline{z_1}$

(f) $z_1 / \overline{z_1}$

Aufgabe 1.3

(a) $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{1 - \mathrm{i}} - \overline{4 + 5\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i}) - (4 - 5\mathrm{i}) = -3 + 6\mathrm{i}$

Aufgabe 1.3

(a) $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{1 - \mathrm{i}} - \overline{4 + 5\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i}) - (4 - 5\mathrm{i}) = -3 + 6\mathrm{i}$

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(1 - \mathrm{i}) - (4 + 5\mathrm{i})} = \overline{-3 - 6\mathrm{i}} = -3 + 6\mathrm{i}$

Aufgabe 1.3

(a) $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{1 - \mathrm{i}} - \overline{4 + 5\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i}) - (4 - 5\mathrm{i}) = -3 + 6\mathrm{i}$

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(1 - \mathrm{i}) - (4 + 5\mathrm{i})} = \overline{-3 - 6\mathrm{i}} = -3 + 6\mathrm{i}$

(c) $\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(1 - \mathrm{i}) \cdot \mathrm{Re}(4 + 5\mathrm{i}) = 1 \cdot 4 = 4$

Aufgabe 1.3

(a) $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{1 - \mathrm{i}} - \overline{4 + 5\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i}) - (4 - 5\mathrm{i}) = -3 + 6\mathrm{i}$

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(1 - \mathrm{i}) - (4 + 5\mathrm{i})} = \overline{-3 - 6\mathrm{i}} = -3 + 6\mathrm{i}$

(c) $\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(1 - \mathrm{i}) \cdot \mathrm{Re}(4 + 5\mathrm{i}) = 1 \cdot 4 = 4$

(d) $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}\left((1 - \mathrm{i})(4 + 5\mathrm{i})\right) = \mathrm{Re}(4 + 5 + \mathrm{i}) = 9$

Aufgabe 1.3

(a) $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{1 - \mathrm{i}} - \overline{4 + 5\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i}) - (4 - 5\mathrm{i}) = -3 + 6\mathrm{i}$

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(1 - \mathrm{i}) - (4 + 5\mathrm{i})} = \overline{-3 - 6\mathrm{i}} = -3 + 6\mathrm{i}$

(c) $\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(1 - \mathrm{i}) \cdot \mathrm{Re}(4 + 5\mathrm{i}) = 1 \cdot 4 = 4$

(d) $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}\big((1 - \mathrm{i})(4 + 5\mathrm{i})\big) = \mathrm{Re}(4 + 5 + \mathrm{i}) = 9$

(e) $z_1 \cdot \overline{z}_1 = (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 1 + 1 = 2$

Aufgabe 1.3

(a) $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{1 - \mathrm{i}} - \overline{4 + 5\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i}) - (4 - 5\mathrm{i}) = -3 + 6\mathrm{i}$

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(1 - \mathrm{i}) - (4 + 5\mathrm{i})} = \overline{-3 - 6\mathrm{i}} = -3 + 6\mathrm{i}$

(c) $\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(1 - \mathrm{i}) \cdot \mathrm{Re}(4 + 5\mathrm{i}) = 1 \cdot 4 = 4$

(d) $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}\left((1 - \mathrm{i})(4 + 5\mathrm{i})\right) = \mathrm{Re}(4 + 5 + \mathrm{i}) = 9$

(e) $z_1 \cdot \overline{z}_1 = (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 1 + 1 = 2$

(f) $z_1/\overline{z_1} = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{(1 - \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \dfrac{1 - 2\mathrm{i} - 1}{2} = -\mathrm{i}$

Aufgabe 1.4

Berechne ohne Taschenrechner.

(a) i^{254}

(b) i^{-571}

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \mathrm{i}^k$

Aufgabe 1.4

(a) $\mathrm{i}^{254} = \mathrm{i}^{252} \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

Aufgabe 1.4

(a) $\mathrm{i}^{254} = \mathrm{i}^{252} \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

(b) $\mathrm{i}^{-573} = 1 \cdot \mathrm{i}^{-571} = \mathrm{i}^{572} \cdot \mathrm{i}^{-571} = \mathrm{i}^{572-571} = \mathrm{i}$

Aufgabe 1.4

(a) $\mathrm{i}^{254} = \mathrm{i}^{252} \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

(b) $\mathrm{i}^{-573} = 1 \cdot \mathrm{i}^{-571} = \mathrm{i}^{572} \cdot \mathrm{i}^{-571} = \mathrm{i}^{572-571} = \mathrm{i}$

(c) $\sum_{k=1}^{9} \mathrm{i}^k = \underbrace{\mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4}_{0} + \underbrace{\mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7 + \mathrm{i}^8}_{0} + \mathrm{i}^9 = \mathrm{i}$

Aufgabe 1.5

Vereinfache die Ausdrücke (v, w, $z \in \mathbb{C}$).

(a) $|(1+2\mathrm{i})^8|$

(b) $\overline{v + \overline{w}} - \left(\overline{v} + w\right)$

(c) $(z+1)^2 - (z+\mathrm{i})^2 - 2z(1-\mathrm{i})$

(d) $z + \overline{z} - \operatorname{Re} z$

Aufgabe 1.5

(a) $|(1+2\mathrm{i})^8| = |1+2\mathrm{i}|^8 = \sqrt{5}^8 = 625$

Aufgabe 1.5

(a) $|(1+2\mathrm{i})^8| = |1+2\mathrm{i}|^8 = \sqrt{5}^8 = 625$

(b) $$\begin{aligned}\overline{v+\overline{w}} - \left(\overline{v}+w\right) &= \overline{v} + \overline{\overline{w}} - \overline{v} - w \\ &= \overline{v} + w - \overline{v} - w = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 1.5

(a) $|(1+2\mathrm{i})^8| = |1+2\mathrm{i}|^8 = \sqrt{5}^8 = 625$

(b) $$\begin{aligned} \overline{v+\overline{w}} - \left(\overline{v}+w\right) &= \overline{v} + \overline{\overline{w}} - \overline{v} - w \\ &= \overline{v} + w - \overline{v} - w = 0 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} &(z+1)^2 - (z+\mathrm{i})^2 - 2z(1-\mathrm{i}) \\ &= z^2 + 2z + 1 - (z^2 - 2\mathrm{i}z - 1) - 2z + 2\mathrm{i}z \\ &= z^2 + 2z + 1 - z^2 + 2\mathrm{i}z + 1 - 2z + 2\mathrm{i}z \\ &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.5

(a) $|(1+2\mathrm{i})^8| = |1+2\mathrm{i}|^8 = \sqrt{5}^8 = 625$

(b) $$\overline{v+\overline{w}} - \left(\overline{v}+w\right) = \overline{v}+\overline{\overline{w}} - \overline{v} - w$$
$$= \overline{v} + w - \overline{v} - w = 0$$

(c) $$(z+1)^2 - (z+\mathrm{i})^2 - 2z(1-\mathrm{i})$$
$$= z^2 + 2z + 1 - (z^2 - 2\mathrm{i}z - 1) - 2z + 2\mathrm{i}z$$
$$= z^2 + 2z + 1 - z^2 + 2\mathrm{i}z + 1 - 2z + 2\mathrm{i}z$$
$$= 2$$

(d) $z = a + \mathrm{i}b$
$(a+\mathrm{i}b) + (a-\mathrm{i}b) - a = a = \mathrm{Re}(z)$

Aufgabe 1.6

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 2x + 4 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 1.6

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -2,\ c = 4$

Aufgabe 1.6

Koeffizienten: $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$

$D = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 = 12\mathrm{i}^2$

Aufgabe 1.6

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -2,\ c = 4$

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 = 12\mathrm{i}^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12\mathrm{i}^2}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$$

Aufgabe 1.6

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -2,\ c = 4$

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 = 12\mathrm{i}^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12\mathrm{i}^2}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$$

$$x_2 = \cdots = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$$

Aufgabe 1.7

Beweise: $|z|^2 = \mathrm{Re}(z^2) + 2\,\mathrm{Im}^2(z)$

Aufgabe 1.7

Setze $z = a + \mathrm{i}b$

Aufgabe 1.7

Setze $z = a + \mathrm{i}b$

links: $|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2$

Aufgabe 1.7

Setze $z = a + \mathrm{i}b$

links: $|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2$

rechts: $\operatorname{Re}\big((a + \mathrm{i}b)(a + \mathrm{i}b)\big) + 2\,\operatorname{Im}^2(a + \mathrm{i}b)$

$$= \operatorname{Re}(a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab) + 2b^2$$

$$= a^2 - b^2 + 2b^2 = a^2 + b^2$$