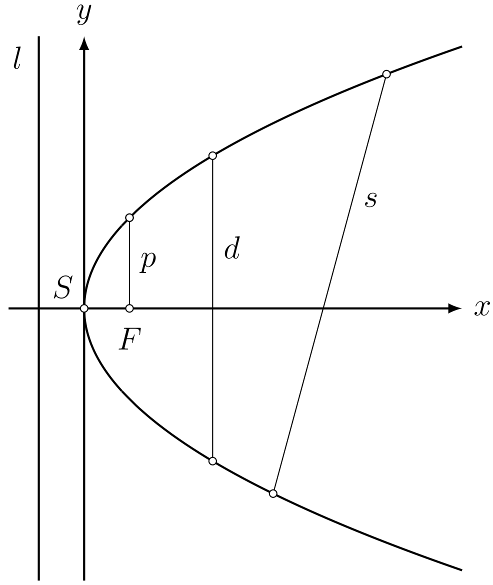
Aufgabe 1



F: Brennpunkt

S: Scheitelpunkt

x-Achse: (Parabel)Achse

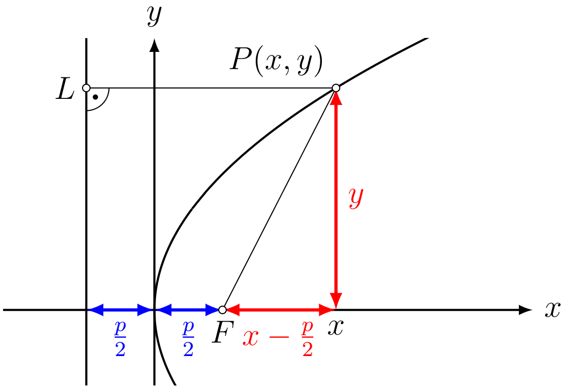
l: Leitgerade

p: Quermass

s: Sehne

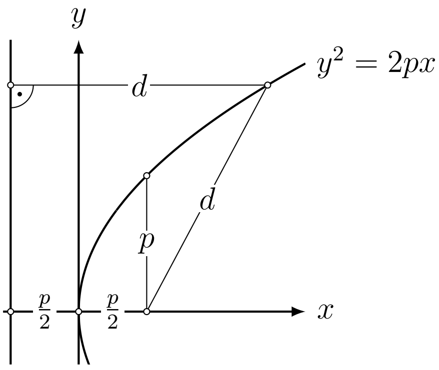
d: Durchmesser

Aufgabe 2



$$
\begin{aligned}
\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} &= x+\frac{p}{2} \quad ||^2 \\
\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2 &= x^2+px+\frac{p^2}{4} \\
x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 &= x^2+2px+\frac{p^2}{4} \\
-px+y^2 &= px \\
y^2 &= 2px
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3



(a) Brennpunkt: $F(\frac{5}{2}, 0)$

$\frac{p}{2} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad p = 2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 10x$

(b) Leitgerade: $x = -1$

$\frac{p}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad p = 2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4x$

(c) Kurvenpunkt: $P(1, 7)$

$7^2 = 2p \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 2p = 49 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 49x$

Aufgabe 4

$k\colon y^2 = 12x \quad \Rightarrow \quad 144 = 156 \quad \Rightarrow \quad P(13, -12) \notin k$

Aufgabe 5

$y^2 = \dfrac{5}{2}x$ in $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ einsetzen:

$$\frac{x^2}{144} + \frac{5x/2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{5}{72}x - 1 = 0 \quad || \cdot 144$$

$$x^2 + 10x - 144 = 0$$

$$x_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \pm 2\sqrt{5}$$

$$x_2 = -18 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$S_1(8, 2\sqrt{5}),\ S_2(8, -2\sqrt{5})$

Aufgabe 6

Gegeben: p: $y^2 = 4x$ und $P(9, y)$ mit $y > 0$

Parabelparameter: $p = 2$

$x_0 = 9$ in $y^2 = 4x$ einsetzen: $y_0 = 6 > 0$

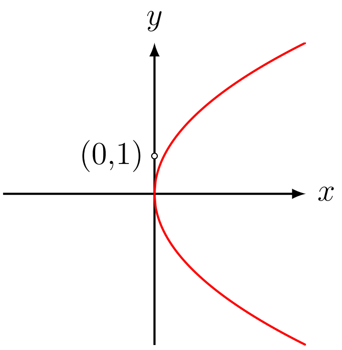
$x_0 = 9$, $y_0 = 6$ und $p = 2$ in die Tangentengleichung der Parabel

$y_0 y = p(x + x_0)$

einsetzen:

$6y = 2(x + 9) = 2x + 18 \quad \Rightarrow \quad t\colon 2x - 6y + 18 = 0$

Aufgabe 7



$y^2 = 4x$

$P(0, 1)$ liegt ausserhalb,

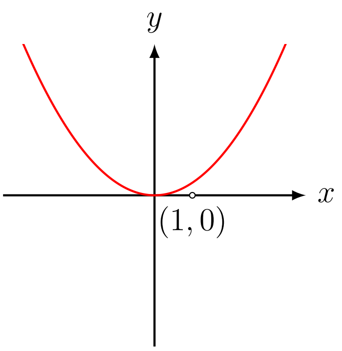
wenn $y^2 > 4x$ wahr ist

(a) $A(9, 6)$ liegt auf der Parabel, da $6^2 = 4 \cdot 9$

(b) $B(-4, 4)$ liegt ausserhalb, da $4^2 > 4 \cdot (-4)$ wahr ist

(c) $C(3, 3)$ liegt innerhalb, da $3^2 > 4 \cdot 3$ falsch ist

Aufgabe 8



$x^2 = 3y$

$P(1, 0)$ liegt ausserhalb,

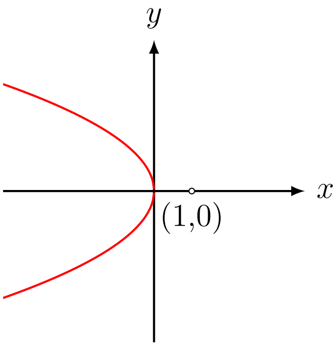
wenn $x^2 > 3y$ wahr ist

(a) $A(3, 4)$ liegt innerhalb, da $3^2 > 3 \cdot 4$ falsch ist.

(b) $B\big(\sqrt{12}, 3\big)$ liegt auf der Parabel, da $12 = 3 \cdot 4$ gilt.

(c) $C(-2, 2)$ liegt ausserhalb, da $(-2)^2 > 3 \cdot 2$ falsch ist.

Aufgabe 9



$y^2 = -2x$

$P(0, 1)$ liegt ausserhalb,

wenn $y^2 > -2x$ wahr ist

(a) $A(-1, 2)$ liegt ausserhalb, da $2^2 > (-2) \cdot (-1)$ wahr ist.

(b) $B(5, -3)$ liegt innerhalb, da $(-3)^2 > (-2) \cdot (-5)$ falsch ist.

(c) $C\big(-1, \sqrt{2}\big)$ liegt auf der Parabel da $\big(\sqrt{2}\big)^2 = (-2) \cdot (-1)$ gilt.

Aufgabe 10

Gegeben: Gerade $g\colon y = 2x - 6$, Parabel $p\colon y^2 = 16x$

(a) $g \cap p$:
$$\begin{aligned} (2x-6)^2 &= 16x \\ 4x^2 - 24x + 36 &= 16x \\ 4x^2 - 40x + 36 &= 0 \\ x^2 - 10x + 9 &= 0 \\ (x-1)(x-9) &= 0 \\ x_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad S_1(1, -4) \\ x_2 = 9 \quad &\Rightarrow \quad S_2(9, 12) \end{aligned}$$

(b) $|S_1S_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}$

Aufgabe 11

Gegeben: $P(-3, -4)$ und $y^2 = 16x \quad \Rightarrow \quad p = 8$

Polare:
$$\begin{aligned} y_0 y &= p(x + x_0) \\ -4y &= 8(x - 3) \\ -4y &= 8x - 24 \quad || : (-4) \\ y &= -2x + 6 = 6 - 2x \end{aligned}$$

Polare $\cap$ Parabel:
$$\begin{aligned}(6-2x)^2 &= 16x\\ 4(3-x)^2 &= 16x\\ (3-x)^2 &= 4x\\ 9-6x+x^2 &= 4x\\ x^2-10x+9 &= 0\\ (x-1)(x-9) &= 0\\ x_1 &= 1 \quad\Rightarrow\quad S_1(1,4)\\ x_2 &= 9 \quad\Rightarrow\quad S_2(9,-12)\end{aligned}$$

Koordinaten von $S_1(1,4)$ und $S_2(9,-12)$ jeweils in die Tangentengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}y_0y &= p(x+x_0)\\ 4y &= 8(x+1)\\ y &= 2(x+1)\\ y &= 2x+2\end{aligned}$$

$t_1\colon 2x-y+2=0$

$$\begin{aligned}y_0y &= p(x+x_0)\\ -12y &= 8(x+9)\\ -12y &= 8x+72\\ -3y &= 2x+18\end{aligned}$$

$t_2\colon 2x+3y+18=0$

Aufgabe 12

Lösungsweg 1: (Diskriminantenmethode)

Gerade: $2x-y+10=0 \quad\Rightarrow\quad y=2x+10 \quad (1)$

Parabel: $y^2=2px$ (2)

(1) in (2) einsetzen:
$$\begin{aligned}(2x+10)^2 &= 2px\\ 4x^2+40x+100 &= 2px \quad \text{(auf Normalform bringen)}\\ 4x^2+40x-2px+100 &= 0\\ 2x^2+20x-px+50 &= 0\\ 2x^2+(20-p)x+50 &= 0\end{aligned}$$

Berühren bedeutet: die obige Gleichung hat *genau eine* Lösung.

Daher muss für die Diskriminante $D=0$ gelten.

$a=2$, $b=20-p$, $c=50$

$$\begin{aligned}D &= 0\\ b^2-4ac &= 0\\ (20-p)^2-4\cdot 2\cdot 50 &= 0\\ 400-40p+p^2-400 &= 0\\ p^2-40p &= 0\\ p(p-40) &= 0\\ p_1 &= 0 \quad \text{(keine Parabel)}\\ p_2 &= 40\end{aligned}$$

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-(20-40)}{2\cdot 2}=\frac{20}{4}=5 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad P(5,20)$$

Parabelgleichung: $y^2=2px=80x$

Lösungsweg 2: (Koeffizientenvergleich)

$y_0 y = p(x + x_0)$ (Tangentenformel für Parabel)
$y_0 y = px + px_0$
$px - y_0 y + px_0 = 0$
$2x - y + 10 = 0$ (vereinfachte Tangentengleichung)
$2fx - fy + 10f = 0$ (unvereinfachte Tangentegleichung)

Koeffizientenvergleich:
$$\begin{aligned} p &= 2f & & & (1)\\ -y_0 &= -f & \Rightarrow \quad & y_0 = f & (2)\\ px_0 &= 10f & & & (3) \end{aligned}$$

Setze (1) in (2) ein: $2fx_0 = 10f \quad \Rightarrow \quad x_0 = 5$

(2), (1) und $x_0 = 5$ in Parabelgleichung $y_0^2 = 2px_0$ einsetzen:

$f^2 = 2 \cdot 2f \cdot 5 = 20f \;\Rightarrow\; f = 20 \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} p = 40$ und $y_0 = 20$

$\Rightarrow \quad y^2 = 80x$ und $B(5, 20)$

Aufgabe 13

Gegeben: Parabel $y^2 = 10x$, Gerade $x - 2y - 4 = 0$

Lösung mit Koeffizientenvergleich:

Aus $y^2 = 10x = 2px$ folgt $p = 5$

$y_0 y = 5(x + x_0)$ (Tangentenformel für Parabel)
$y_0 y = 5x + 5x_0$
$5x - y_0 y + 5x_0 = 0$
$x - 2y + c = 0$ (vereinfachte Tangentengleichung $c = ?$)
$fx - 2fy + fc = 0$ (Tangentengleichung mit Faktor f)

Koeffizientenvergleich:
$$\begin{aligned} 5 &= f\\ y_0 &= 2f = 10\\ 5x_0 &= fc = 5c \;\Rightarrow\; x_0 = c \end{aligned}$$

Setze $y_0 = 10$ in $y_0^2 = 10x_0$ ein: $100 = 10x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 10$

$t\colon x - 2y + 10 = 0$ und $B(10, 10)$