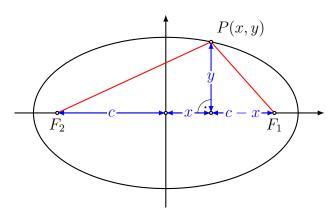


## Aufgabe 2



$$\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 2a$$
 (Formelsammlung)

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} + \sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a$$
 (2 × Satz des Pythagoras)

Wegen 
$$c + x = x + c$$
 und  $(c - x)^2 = (x - c)^2$  ist auch  $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$  richtig.

#### Aufgabe 3

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$$

grosse Halbachse:  $a=\sqrt{7},$ kleine Halbachse: b=2

$$k \colon \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(a) 
$$P(1,2): \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

(b) 
$$P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \implies P \in k$$

(c) 
$$P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

(d) 
$$P(\sqrt{2}, \sqrt{2}): \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1 \implies P \in k$$

(e) 
$$P(3,-1): \frac{9}{6} + \frac{1}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

(f) 
$$P(0, \sqrt{3}) \quad \frac{0}{6} + \frac{3}{3} = 1 \implies P \in k$$

# Aufgabe 5

(a) 
$$P(x,1)$$
:  $\frac{x^2}{12} + \frac{1}{4} = 1$  
$$\frac{x^2}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \implies x = \pm 3$$

(b) 
$$P(3,y)$$
:  $\frac{9}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$  
$$\frac{y^2}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

(c) 
$$P(a, a)$$
:  $\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} = 1$   
 $\frac{a^2}{12} + \frac{3a^2}{12} = \frac{4a^2}{12} = \frac{a^2}{3} = 1 \implies a = \pm\sqrt{3}$ 

(a) 
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

(b) 
$$c^2 = a^2 - b^2 \implies b^2 = a^2 - c^2 = 9 \implies \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(c) 
$$c^2 = a^2 - b^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 7 = 16 \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$$

(d) 
$$P(6,4) \in \text{Ellipse: } \frac{36}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$
 (1)

$$Q(8,3) \in \text{Ellipse: } \frac{64}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$
 (2)

$$9 \cdot (1) - 16 \cdot (2)$$
:  $-\frac{700}{a^2} = -7 \quad || : (-7)$ 
$$\frac{100}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 10$$

(2): 
$$\frac{36}{100} + \frac{16}{b^2} = 1 \implies \frac{16}{b^2} = \frac{64}{100} \implies b^2 = 25 \implies b = 5$$

## Aufgabe 7

Gegeben: 
$$k_1$$
:  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$  und  $k_2$ :  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 

(a) 
$$k_1$$
:  $a_1 = \sqrt{7}$ ,  $b_1 = \sqrt{3}$ 

lineare Exzentrizität: 
$$c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{7 - 3} = 2$$

numerische Exzentrizität: 
$$\varepsilon_1 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$k_2$$
:  $a_2 = \sqrt{6}$ ,  $b_2 = \sqrt{2}$ 

lineare Exzentrizität: 
$$c_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = \sqrt{6-2} = 2$$

numerische Exzentrizität: 
$$\varepsilon_2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

(b) Für 
$$c=0$$
 gilt  $0^2=a^2-b^2\Rightarrow a=b\Rightarrow$  Ellipse ist Kreis

Somit hat für c=0 auch die numerische Exzentrizität den Wert  $\varepsilon=0/a=0$ . Also gleicht eine Ellipse umso mehr einem Kreis, je näher  $\varepsilon$  bei 0 liegt.

Somit folgt aus  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow k_1$  hat mehr die Form eines Kreises als  $k_2$ .

(a) 
$$k_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1:$$
  
 $a = 5, b = 2 \implies A = ab\pi = 5 \cdot 2 \cdot \pi = 10\pi$ 

(b) 
$$k_1 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$
:  
 $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{2} \implies A = ab\pi = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi = 4\pi$ 

#### Aufgabe 9

Gegeben: 
$$k : \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$$
 und  $g : y = \frac{2}{3}x + 14$ 

$$k \colon 100x^2 + 225y^2 = 22500$$

$$g: 3y = 2x + 42 \implies 2x = 3y - 42$$

q geschickt in k einsetzen:

$$25 \cdot (2x)^{2} + 225y^{2} = 22500$$

$$25 \cdot (3y - 42)^{2} + 225y^{2} = 22500$$

$$(3y - 42)^{2} + 9y^{2} = 900$$

$$9y^{2} - 252y + 1764 + 9y^{2} = 900$$

$$18y^{2} - 252y + 864 = 0$$

$$y_{1} = 6 \implies x_{1} = -12 \implies S_{1}(-12, 6)$$

$$y_{2} = 8; \implies x_{2} = -9 \implies S_{2}(-9, 8)$$

## Aufgabe 10

$$k \colon \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1; P(4, y)$$

$$x = 4$$
:  $\frac{16}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = 1 \ (y > 1)$ 

Tangentengleichung: 
$$t: \frac{x_P \cdot x}{20} + \frac{y_P \cdot y}{5} = 1$$

$$\frac{4x}{20} + \frac{y}{5} = 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$$

$$x + y = 5 \quad \text{oder: } y = -x + 5$$

$$k : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1; P(6,1)$$

Polare zum Pol
$$P$$
der Ellipse:  $\frac{6\cdot x}{20} + \frac{1\cdot y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ 

$$k: x^2 + 4y^2 = 20$$

$$g: 3x + 2y = 10 \implies 2y = 10 - 3x \quad (*)$$
  
 $(2y)^2 = (10 - 3x)^2$   
 $4y^2 = 100 - 60x + 9x^2 \quad \text{in } k \text{ einsetzen}$ 

$$x^{2} + \underbrace{100 - 60x + 9x^{2}}_{4y^{2}} = 20$$

$$10x^{2} - 60x + 80 = 0$$

$$x^{2} - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

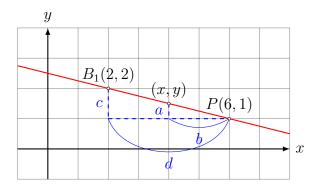
$$x_1 = 2$$
  $\Rightarrow$   $2y_1 = 10 - 3 \cdot 2 = 4$   $\Rightarrow$   $y_1 = 2$   
 $y_2 = 4$   $\Rightarrow$   $2y_2 = 10 - 3 \cdot 4 = -2$   $\Rightarrow$   $y_2 = -1$ 

Berührpunkte:  $B_1(2,2)$  und  $B_2(4,-1)$ 

Um die Gleichung der Graden durch die Punkte  $B_1$  und P zu bestimmen, kann man sich die Arbeit etwas erleichtern, indem man den zweiten Strahlensatz

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
 (siehe Skizze unten)

verwendet und die so gewonnene Gleichung nach y auflöst oder wie hier einfach nur nennerfrei macht.



Tangente durch 
$$P(6,1), B_1(2,2): \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-1}{x-6} = \frac{2-1}{2-6} = -\frac{1}{4}$$

$$t_1$$
:  $x + 4y = 10$ 

Die Reihenfolge, in der man die Differenzen berechnet, spielt übrigens keine Rolle, sofern man im Zähler und Nenner jeweils die Koordinaten der entsprechenden Punkte subtrahiert.

Die Gleichung  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-y}{6-x} = \frac{1-2}{6-2} = -\frac{1}{4}$  würde also auch zum richtigen Ergebnis führen.

Tangente durch 
$$P(6,1)$$
,  $B_2(4,-1)$ :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-1}{x-6} = \frac{-1-1}{4-6} = 1$ 

$$t_2$$
:  $x - y = 5$