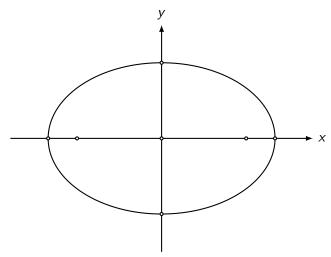
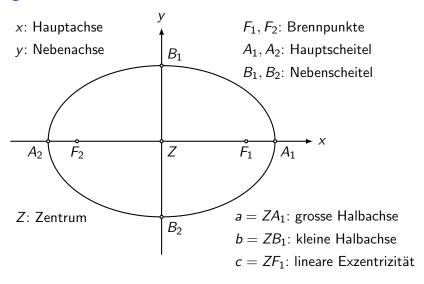
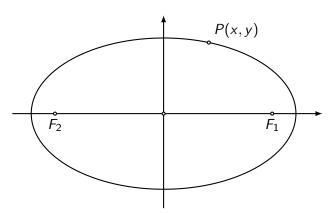
Kegelschnitte (Ellipsen) Prüfungsvorbereitung

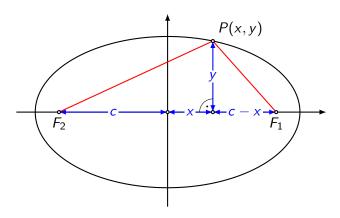
Gegeben ist eine Ellipse. Beschrifte möglichst viele Punkte, Strecken und Geraden in der Skizze mit Fachausdrücken.





Zeige (ohne Vereinfachung), wie die Koordinatengleichung einer zentrierten und achsenparallelen Ellipse aus der Brennpunktsdefinition hergeleitet wird.





$$\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 2a$$
 (Formelsammlung)

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$$
 (2 × Satz des Pythagoras)

Wegen
$$c + x = x + c$$
 und $(c - x)^2 = (x - c)^2$ ist auch $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$ richtig.

Wie lang sind die grosse und die kleine Halbachse der Ellipse mit folgender Gleichung?

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$$

grosse Halbachse: $a = \sqrt{7}$, kleine Halbachse: b = 2

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $k \colon \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. Welche der folgenden Punkte liegen auf k?

- (a) P(1,2)
- (b) P(2,1)
- (c) P(0,0)
- (d) $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- (e) P(3,-1)
- (f) $P(0, \sqrt{3})$

$$k: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(a)
$$P(1,2)$$
: $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \implies P \notin k$

$$k \colon \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(a)
$$P(1,2)$$
: $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \implies P \notin k$

(b)
$$P(2,1)$$
: $\frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \implies P \in k$

$$k \colon \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(a)
$$P(1,2)$$
: $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \implies P \notin k$

(b)
$$P(2,1)$$
: $\frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \implies P \in k$

(c)
$$P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

$$k \colon \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(a)
$$P(1,2)$$
: $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \implies P \notin k$

(b)
$$P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \implies P \in k$$

(c)
$$P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

(d)
$$P(\sqrt{2}, \sqrt{2}): \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1 \implies P \in k$$

$$k \colon \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(a)
$$P(1,2)$$
: $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \implies P \notin k$

(b)
$$P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \implies P \in k$$

(c)
$$P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

(d)
$$P(\sqrt{2}, \sqrt{2}): \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1 \implies P \in k$$

(e)
$$P(3,-1): \frac{9}{6} + \frac{1}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

$$k \colon \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(a)
$$P(1,2)$$
: $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \neq 1 \implies P \notin k$

(b)
$$P(2,1): \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1 \implies P \in k$$

(c)
$$P(0,0): \frac{0}{6} + \frac{0}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

(d)
$$P(\sqrt{2}, \sqrt{2}): \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1 \implies P \in k$$

(e)
$$P(3,-1): \frac{9}{6} + \frac{1}{3} \neq 1 \implies P \notin k$$

(f)
$$P(0, \sqrt{3}) \quad \frac{0}{6} + \frac{3}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad P \in k$$

Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung $k : \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bestimme die fehlenden Koordinaten von P, so dass $P \in k$.

- (a) P(x,1)
- (b) P(3, y)
- (c) P(a, a)

(a)
$$P(x,1)$$
: $\frac{x^2}{12} + \frac{1}{4} = 1$
 $\frac{x^2}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \implies x = \pm 3$

(a)
$$P(x,1)$$
: $\frac{x^2}{12} + \frac{1}{4} = 1$
 $\frac{x^2}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \implies x = \pm 3$
(b) $P(3,y)$: $\frac{9}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
 $\frac{y^2}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \implies y = \pm 1$

(a)
$$P(x,1)$$
: $\frac{x^2}{12} + \frac{1}{4} = 1$
 $\frac{x^2}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \implies x = \pm 3$
(b) $P(3,y)$: $\frac{9}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

$$\frac{y^2}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$
(c) $P(a, a)$: $\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} = 1$

$$\frac{a^2}{12} + \frac{3a^2}{12} = \frac{4a^2}{12} = \frac{a^2}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm \sqrt{3}$$

Wie lautet die Gleichung der Ellipse mit den gegeben Bestimmungsstücken?

- (a) a = 6, $b = \sqrt{11}$
- (b) a = 5, c = 4
- (c) $F_1(3,0)$, $b=\sqrt{7}$
- (d) P(6,4) und Q(8,3) liegen auf der Ellipse

(a)
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

(b)
$$c^2 = a^2 - b^2 \implies b^2 = a^2 - c^2 = 9 \implies \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(c)
$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 7 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$$

(d)
$$P(6,4) \in \text{Ellipse: } \frac{36}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$
 (1)

$$Q(8,3) \in \text{Ellipse: } \frac{64}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$
 (2)

$$9 \cdot (1) - 16 \cdot (2)$$
: $-\frac{700}{a^2} = -7 \quad || : (-7)$

$$\frac{100}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 10$$

(2):
$$\frac{36}{100} + \frac{16}{b^2} = 1 \implies \frac{16}{b^2} = \frac{64}{100} \implies b^2 = 25 \implies b = 5$$

Gegeben sind die Ellipsen
$$k_1 : \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$$
 und $k_2 : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

- (a) Bestimme die lineare und die numerische Exzentrizität beider Ellipsen.
- (b) Welche der beiden Ellipsen gleicht mehr einem Kreis? Begründe die Antwort.

Gegeben:
$$k_1$$
: $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ und k_2 : $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(a)
$$k_1$$
: $a_1=\sqrt{7}$, $b_1=\sqrt{3}$ lineare Exzentrizität: $c_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}=\sqrt{7-3}=2$ numerische Exzentrizität: $\varepsilon_1=\frac{c_1}{a_1}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

Gegeben:
$$k_1$$
: $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ und k_2 : $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(a)
$$k_1$$
: $a_1 = \sqrt{7}$, $b_1 = \sqrt{3}$
lineare Exzentrizität: $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{7 - 3} = 2$
numerische Exzentrizität: $\varepsilon_1 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$
 k_2 : $a_2 = \sqrt{6}$, $b_3 = \sqrt{2}$

$$k_2$$
: $a_2=\sqrt{6}$, $b_2=\sqrt{2}$ lineare Exzentrizität: $c_2=\sqrt{a_2^2-b_2^2}=\sqrt{6-2}=2$ numerische Exzentrizität: $\varepsilon_2=\frac{c_2}{a_2}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}$

Gegeben:
$$k_1: \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$$
 und $k_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(a) k_1 : $a_1=\sqrt{7}$, $b_1=\sqrt{3}$ lineare Exzentrizität: $c_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}=\sqrt{7-3}=2$ numerische Exzentrizität: $\varepsilon_1=\frac{c_1}{a_1}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$$k_2$$
: $a_2=\sqrt{6}$, $b_2=\sqrt{2}$
lineare Exzentrizität: $c_2=\sqrt{a_2^2-b_2^2}=\sqrt{6-2}=2$
numerische Exzentrizität: $\varepsilon_2=\frac{c_2}{a_2}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}$

(b) Für c=0 gilt $0^2=a^2-b^2\Rightarrow a=b\Rightarrow$ Ellipse ist Kreis Somit hat für c=0 auch die numerische Exzentrizität den Wert $\varepsilon=0/a=0$. Also gleicht eine Ellipse umso mehr einem Kreis, je näher ε bei 0 liegt.

Somit folgt aus $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow k_1$ hat mehr die Form eines

Berechne den Flächeninhalt folgender Ellipsen.

(a)
$$k_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1:$$

(b)
$$k_1: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1:$$

(a)
$$k_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1:$$

 $a = 5, b = 2 \implies A = ab\pi = 5 \cdot 2 \cdot \pi = 10\pi$

(a)
$$k_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1:$$

 $a = 5, b = 2 \implies A = ab\pi = 5 \cdot 2 \cdot \pi = 10\pi$
(b) $k_1: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1:$
 $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{2} \implies A = ab\pi = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi = 4\pi$

Gegeben:
$$k: \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$$
 und $g: y = \frac{2}{3}x + 14$

Untersuche die gegenseitige Lage von k und g und bestimme die Koordinaten allfälliger Schnittpunkte oder eines Berührpunkts.

Gegeben:
$$k : \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$$
 und $g : y = \frac{2}{3}x + 14$
 $k : 100x^2 + 225y^2 = 22500$

$$g$$
 geschickt in k einsetzen:

 $g: 3v = 2x + 42 \implies 2x = 3v - 42$

$$25 \cdot (2x)^{2} + 225y^{2} = 22500$$

$$25 \cdot (3y - 42)^{2} + 225y^{2} = 22500$$

$$(3y - 42)^{2} + 9y^{2} = 900$$

$$9y^{2} - 252y + 1764 + 9y^{2} = 900$$

$$18y^{2} - 252y + 864 = 0$$

$$y_{1} = 6 \implies x_{1} = -12 \implies S_{1}(-12, 6)$$

$$y_{2} = 8 \implies x_{2} = -9 \implies S_{2}(-9, 8)$$

Berechne die Gleichung der Tangente an die Ellipse

$$k \colon \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$$

im Kurvenpunkt P(4, y) mit y > 0

$$k: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1; P(4, y)$$

$$x = 4$$
: $\frac{16}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = 1 \ (y > 1)$

Tangentengleichung: $t: \frac{x_P \cdot x}{20} + \frac{y_P \cdot y}{5} = 1$

$$\frac{4x}{20} + \frac{y}{5} = 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$$

$$x + y = 5 \quad \text{oder: } y = -x + 5$$

Berechne vom Punkt P(6,1), der ausserhalb der Ellipse liegt, die Gleichungen der Tangenten an die Ellipse

$$k \colon \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

$$k: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1; P(6,1)$$

Polare zum Pol P der Ellipse: $\frac{6 \cdot x}{20} + \frac{1 \cdot y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

$$k: x^2 + 4y^2 = 20$$

 $g: 3x + 2y = 10 \implies 2y = 10 - 3x$ (*)

$$(2y)^2 = (10 - 3x)^2$$

 $4v^2 = 100 - 60x + 9x^2$ in k einsetzen

$$x^{2} + \underbrace{100 - 60x + 9x^{2}}_{4y^{2}} = 20$$
$$10x^{2} - 60x + 80 = 0$$
$$x^{2} - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4)=0$$