Kegelschnitte Übungen Wenn nichts anderes vermerkt, liegen die Achsen der Kegelschnitte auf den Achsen des Koordinatensystems.

Aufgabe 1

Gib die Gleichungen der folgenden Ellipsen an:

(a) Halbachsen: a = 6, b = 4

(b) Halbachsen: a = 4, c = 3

(c) Brennpunkt: $F_1(8,0)$, die grosse Halbachse hat die Länge 15

Die Zahl $\varepsilon=\frac{c}{a}$ nennt man die numerische Exzentrizität der Ellipse mit den Halbachsenlängen a und b (wobei $a\geq b$).

- (a) Zeige, dass für jede Ellipse $0 \le \varepsilon < 1$ gilt.
- (b) Welche Figur erhält man für $\varepsilon=0$, welche für $\varepsilon=1$?
- (c) Berechne für die Erdbahn um die Sonne (die bekanntlich ellipsenförmig ist), die lineare und die numerische Exzentrizität.
 - kleinster Abstand Sonne Erde: $1.462 \cdot 10^8 \,\mathrm{km}$
 - \bullet grösster Abstand Sonne Erde: $1.511\cdot 10^8\,\mathrm{km}$

Zur Erinnerung: Die Sonne befindet sich in einem der Brennpunkte der Ellipse.

Aufgabe 3	3
-----------	---

Bestimme die Länge der Halbachse b	, wenn $a = 4$ ist und de	er Punkt $P(2,1)$	auf der Ellipse
liegt.			

Einer Ellipse mit den Halbachsen a=6 und b=4 wird ein Quadrat einbeschrieben, dessen Seiten parallel zu den Ellipsenachsen sind. Welche Seitenlänge hat dieses Quadrat?

Aufgabe 5

Die Gerade y=2x-1 schneidet die Ellipse mit der Gleichung $9x^2+25y^2=225$ in zwei Punkten. Bestimme die Koordinaten dieser Punkte.

Bestimme die Gleichung der Tangente an die Ellipse $x^2+25y^2=25$ durch den Ellipsenpunkt $P\left(x_0,\frac{1}{2}\right)$ mit $x_0>0$.

Aufgabe 7

Bestimme die Gleichung der Tangenten an die Ellipse $25x^2 + 400y^2 = 10\,000$, die durch den Punkt P(8,11) gehen.

In welchen Punkten haben die Tangenten an die Ellipse $4x^2+36y^2=144$ die Steigung $m=\frac{1}{4}$? Wie lauten die Gleichungen dieser Tangenten?

Die Gerade y=0.6x-5 berührt die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

im Punkt P(3,?). Bestimme die Längen der Halbachsen.

Welche Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$

- (a) geht durch den Punkt P(4,4)?
- (b) hat den Brennpunkt (6,0)?
- (c) hat eine Leitgerade mit der Gleichung x = -2.5?

Aufgabe 11

Die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ wird um u Einheiten in der Richtung der x-Achse verschoben. Welches ist die Gleichung der verschobenen Parabel?

Aufgabe 12

Welche Gleichung hat die Parabel mit dem Scheitelpunkt S, welche symmetrisch zur x-Achse ist und durch den Punkt P geht?

- (a) S(-4,0), P(0,4),
- (b) S(3,0), P(6,3)

In welchen Punkten schneiden sich die Ellipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ und die Parabel $y^2 = 4x$?

Aufgabe 14

Bestimme die Gleichung der Tangente an die Parabel $y^2=2x$ durch den Parabelpunkt $P(2,y_0),$ wobei $y_0>0$ ist.

Gegeben sei die Parabel mit der Gleichung $y^2=2x.$

- (a) Bestimme die Gleichung der Tangenten, die durch den Punkt P(-8,3) gehen.
- (b) In welchem Punkt der Parabel hat die Tangente die Steigung m=1?

Welche Parabel mit der Gleichung $y^2=2px$ berührt die Gerade $g\colon y=x+2?$

Bestimme die Gleichungen der Hyperbeln und ihrer Asymptoten:

- (a) a = 3, b = 2
- (b) b = 3, c = 4
- (c) P(4,0) und Q(5,3) liegen auf der Hyperbel.
- (d) Brennpunkt $F_1(8,0)$, grosse Halbachse a=6

In welchen Punkten schneiden sich die Hyperbeln mit den Gleichungen

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = 1$$
 und $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$?

Aufgabe 19

Die Zahl $\varepsilon=c/a$ mit $c=\sqrt{a^2+b^2}$ nennt man die numerische Exzentrizität der Hyperbel mit den Halbachsenlängen a und b. Zeige, dass für jede Hyperbel gilt: $\varepsilon>1$.

In welchen Punkten hat die Tangente an die Hyperbel $25x^2 - 9y^2 = 225$ die Steigung m = 1?

Die Gerade t: $y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$ berührt eine Hyperbel im Punkt B(4,3). Bestimme die Gleichung der Hyperbel.

Aufgabe 22

Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

- (a) Für welche Werte $q \in \mathbb{R}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung y = 2x + q die Hyperbel?
- (b) Wann liegt eine Tangente vor?