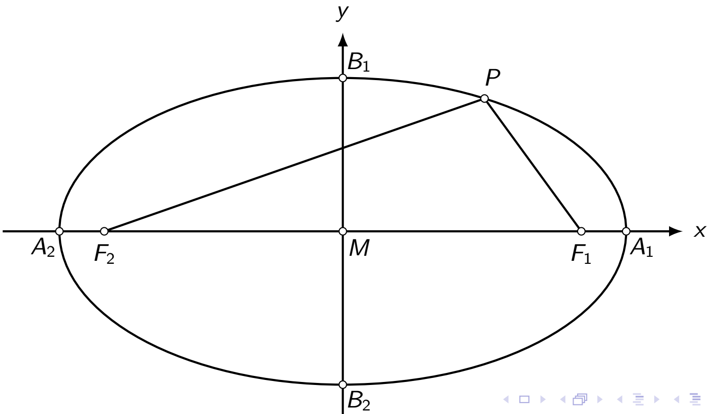
Kegelschnitte

Theorie

Ellipsen

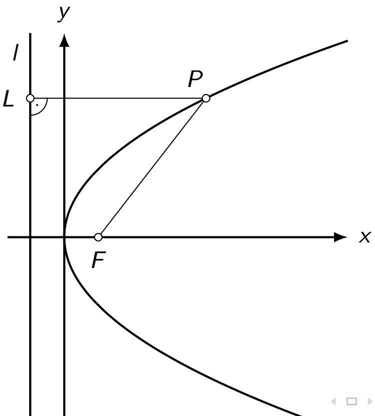
Den geometrischen Ort aller Punkte P einer Ebene, für welche die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant ist, nennt man eine Ellipse.



- Die Punkte F_1 und F_2 heissen die Brennpunkte der Ellipse.
- Die Gerade durch F_1 und F_2 ist die Hauptachse, die Mittelsenkrechte der Strecke F_1F_2 ist die Nebenachse der Ellipse.
- Der Schnittpunkt M der beiden Achsen ist das Zentrum der Ellipse.
- Die Scheitel (oder Scheitelpunkte) A_1 und A_2 auf der Hauptachse sind die Hauptscheitel, die Scheitel B_1 und B_2 die Nebenscheitel.
- Die Strecke $a = MA_1$ ist die grosse Halbachse, die Strecke $b = MB_1$ ist die kleine Halbachse der Ellipse.

Parabel

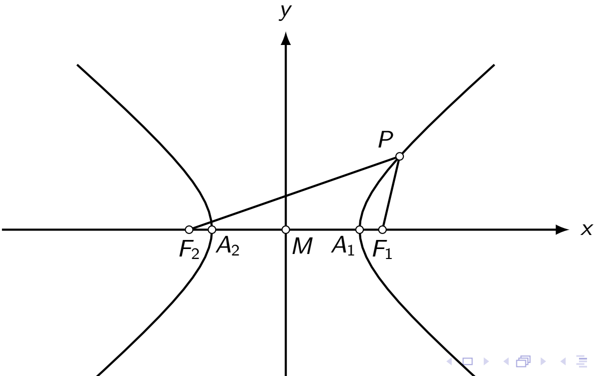
Den geometrischen Ort aller Punkte P einer Ebene, die von einem festen Punkt F und einer festen Geraden l gleich weit entfernt sind, nennt man eine Parabel.



- Der Punkt F heisst Brennpunkt der Parabel.
- Die Gerade l ist die Leitgerade der Parabel.
- Die Gerade senkrecht auf l durch F ist die Achse a der Parabel.
- Der Parabelpunkt S auf der Achse (der in der Mitte von F und l liegt) ist der Scheitel der Parabel.

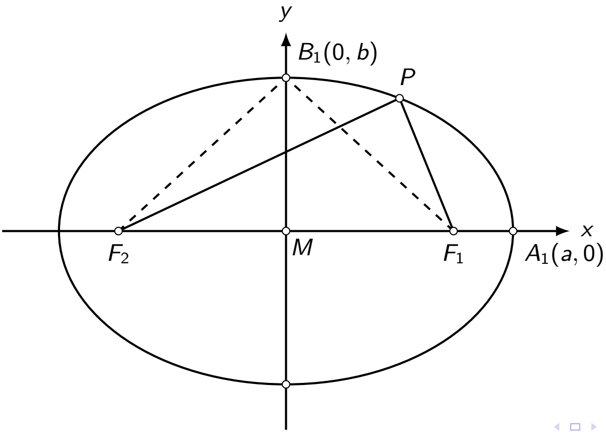
Hyperbel

Der geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für welche die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 (den Brennpunkten) dieser Ebene konstant ist, nennt man eine Hyperbel.



- Die Gerade durch F_1 und F_2 ist die Hauptachse, die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{F_1F_2}$ ist die Nebenachse der Hyperbel.
- Der Schnittpunkt der Achsen (die auch Symmetrieachsen sind) ist das Zentrum M der Hyperbel.
- Die Schnittpunkte A_1 und A_2 der Hauptachse mit der Hyperbel sind die Scheitel (Scheitelpunkte) der Hyperbel.

Gegeben sei eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse mit den Halbachsenabschnitten a und b, wobei die Brennpunkte mit den Koordinaten $F_1(c, 0)$ und $F_2(-c, 0)$ auf der x-Achse liegen sollen.



$$
\begin{aligned}
|PF_2| + |PF_1| &= |A_1F_2| + |A_1F_1| \\
&= |F_2M| + |MF_1| + |F_1A_1| + |A_1F| \\
&= 2|MF_1| + 2|F_1A_1| = 2\big(|MF_1| + |F_1A_1|\big) \\
&= 2|MA_1| = 2a
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}|PF_2| + |PF_1| &= |A_1F_2| + |A_1F_1| \\ &= |F_2M| + |MF_1| + |F_1A_1| + |A_1F| \\ &= 2|MF_1| + 2|F_1A_1| = 2\big(|MF_1| + |F_1A_1|\big) \\ &= 2|MA_1| = 2a\end{aligned}$$

Den Abstand $c = |MF_1| = |MF_2|$ nennt man die *lineare Exzentrizität* der Ellipse. Für diese lineare Exzentrizität gilt:

$$\begin{aligned}|PF_2| + |PF_1| &= |A_1F_2| + |A_1F_1| \\ &= |F_2M| + |MF_1| + |F_1A_1| + |A_1F| \\ &= 2|MF_1| + 2|F_1A_1| = 2\big(|MF_1| + |F_1A_1|\big) \\ &= 2|MA_1| = 2a\end{aligned}$$

Den Abstand $c = |MF_1| = |MF_2|$ nennt man die *lineare Exzentrizität* der Ellipse. Für diese lineare Exzentrizität gilt:

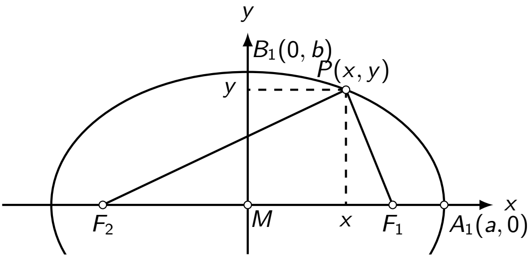
$$c^2 = a^2 - b^2$$

Mittelpunktsgleichung

Der Punkt $P(x, y)$ sei ein Punkt auf der Ellipse. Dann gilt:

Mittelpunktsgleichung

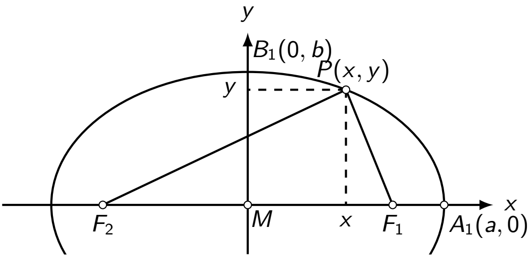
Der Punkt $P(x, y)$ sei ein Punkt auf der Ellipse. Dann gilt:



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Mittelpunktsgleichung

Der Punkt $P(x, y)$ sei ein Punkt auf der Ellipse. Dann gilt:

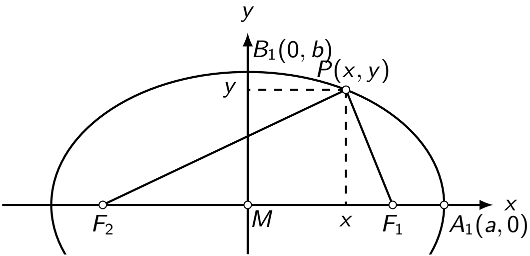


$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Mittelpunktsgleichung

Der Punkt $P(x, y)$ sei ein Punkt auf der Ellipse. Dann gilt:



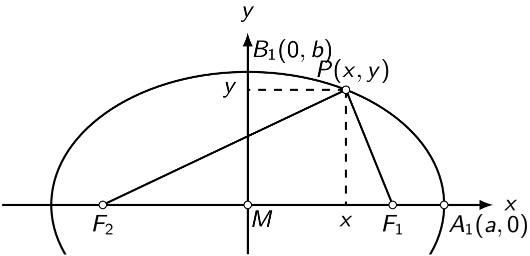
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Mittelpunktsgleichung

Der Punkt $P(x, y)$ sei ein Punkt auf der Ellipse. Dann gilt:



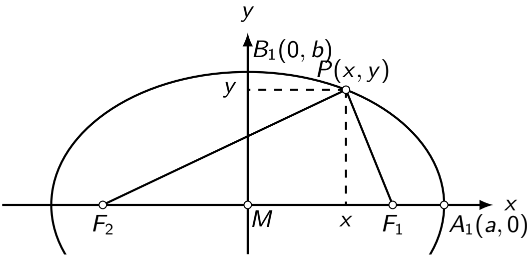
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Mittelpunktsgleichung

Der Punkt $P(x, y)$ sei ein Punkt auf der Ellipse. Dann gilt:



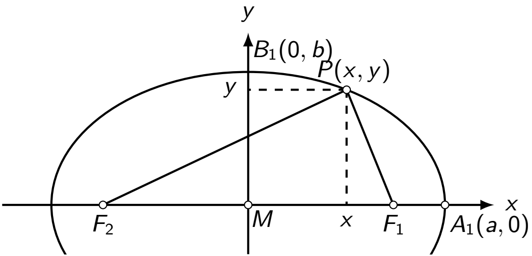
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Mittelpunktsgleichung

Der Punkt $P(x, y)$ sei ein Punkt auf der Ellipse. Dann gilt:



$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

$$x^2(a^2 - b^2) + a^4 = a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

$$x^2(a^2 - b^2) + a^4 = a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2$$

$$a^2x^2 - b^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

$$x^2(a^2 - b^2) + a^4 = a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2$$

$$a^2x^2 - b^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2$$

$$-b^2x^2 = -a^2b^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

$$x^2(a^2 - b^2) + a^4 = a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2$$

$$a^2x^2 - b^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2$$

$$-b^2x^2 = -a^2b^2 + a^2y^2$$

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

$$x^2(a^2 - b^2) + a^4 = a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2$$

$$a^2x^2 - b^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2$$

$$-b^2x^2 = -a^2b^2 + a^2y^2$$

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

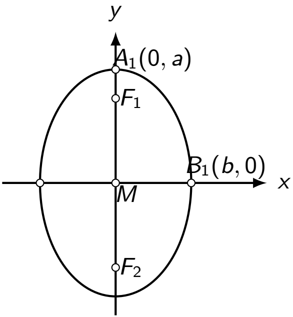
Gleichung einer Ellipse mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Halbachsen a und b:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Ellipsenachsen und Koordinatenachsen fallen zusammen.)

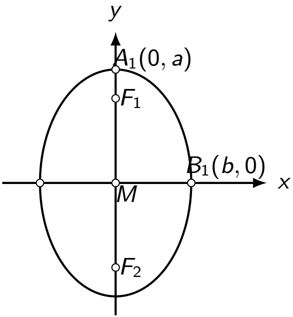
Bemerkung

Für eine Ellipse, deren Brennpunkte auf der y-Achse liegen, müssen wir die Ellipsengleichung umformen:



Bemerkung

Für eine Ellipse, deren Brennpunkte auf der y-Achse liegen, müssen wir die Ellipsengleichung umformen:



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Für einen Kreis mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Radius $r = 1$ gilt:

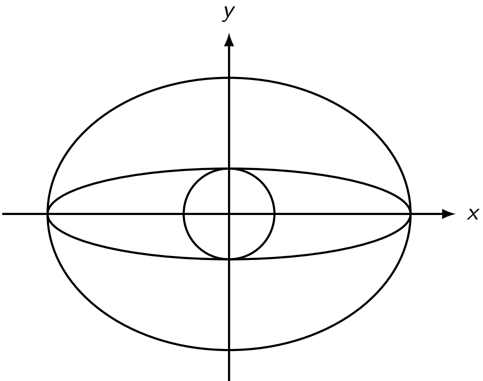
Für einen Kreis mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Radius $r = 1$ gilt:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Für einen Kreis mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Radius $r = 1$ gilt:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Um die Ellipse mit den Halbachsen a und b zu erhalten, strecken wir den Kreis um den Faktor a an der y-Achse und um den Faktor b an der x-Achse.



Das bedeutet, dass der Einheitskreis durch entsprechende Streckungen an den Koordinatenachsen in eine Ellipse transformiert werden kann.

Übertragen wir diese Streckungen auf die Formel für die Kreisfläche, so ist folgendes Resultat plausibel:

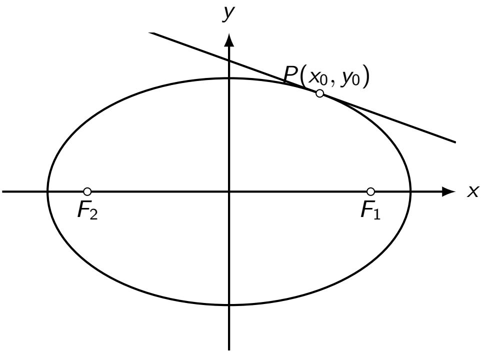
Das bedeutet, dass der Einheitskreis durch entsprechende Streckungen an den Koordinatenachsen in eine Ellipse transformiert werden kann.

Übertragen wir diese Streckungen auf die Formel für die Kreisfläche, so ist folgendes Resultat plausibel:

$$A_{\text{Einheitskreis}} = 1 \cdot 1 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad A_{\text{Ellipse}} = a \cdot b \cdot \pi$$

Tangentengleichung

Die Gleichung einer Geraden soll so gewählt werden, dass sie mit einer gegebenen Ellipse genau einen Punkt $P(x_0, y_0)$ – den Berührpunkt – gemeinsam hat.



Ellipsengleichung $e\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Ellipsengleichung $e\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Ellipsengleichung $e\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Tangentengleichung $t\colon y = mx + q$

Ellipsengleichung $e\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Tangentengleichung $t\colon y = mx + q$

t in e einsetzen:

$$b^2x^2 + a^2(mx+q)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mxq + a^2q^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\underbrace{(a^2m^2 + b^2)}_{\alpha}x^2 + \underbrace{2a^2mq}_{\beta}x + \underbrace{a^2q^2 - a^2b^2}_{\gamma} = 0 \quad (*)$$

t in e einsetzen:

$$b^2x^2 + a^2(mx+q)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mxq + a^2q^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\underbrace{(a^2m^2 + b^2)}_{\alpha}x^2 + \underbrace{2a^2mq}_{\beta}x + \underbrace{a^2q^2 - a^2b^2}_{\gamma} = 0 \quad (*)$$

Damit $(*)$ genau eine Lösung hat muss $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ gelten.

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$4a^4m^2q^2 - 4\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(a^2q^2 - a^2b^2\right) = 0 \quad || : 4$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$4a^4m^2q^2 - 4\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(a^2q^2 - a^2b^2\right) = 0 \quad || : 4$$

$$a^4m^2q^2 - \left(a^4m^2q^2 - a^4m^2b^2 + a^2b^2q^2 - a^2b^4\right) = 0$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$4a^4m^2q^2 - 4\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(a^2q^2 - a^2b^2\right) = 0 \quad || : 4$$

$$a^4m^2q^2 - \left(a^4m^2q^2 - a^4m^2b^2 + a^2b^2q^2 - a^2b^4\right) = 0$$

$$a^4m^2b^2 - a^2b^2q^2 + a^2b^4 = 0 \quad || : a^2b^2$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$4a^4m^2q^2 - 4\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(a^2q^2 - a^2b^2\right) = 0 \quad || : 4$$

$$a^4m^2q^2 - \left(a^4m^2q^2 - a^4m^2b^2 + a^2b^2q^2 - a^2b^4\right) = 0$$

$$a^4m^2b^2 - a^2b^2q^2 + a^2b^4 = 0 \quad || : a^2b^2$$

$$a^2m^2 - q^2 + b^2 = 0$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$4a^4m^2q^2 - 4\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(a^2q^2 - a^2b^2\right) = 0 \quad || : 4$$

$$a^4m^2q^2 - \left(a^4m^2q^2 - a^4m^2b^2 + a^2b^2q^2 - a^2b^4\right) = 0$$

$$a^4m^2b^2 - a^2b^2q^2 + a^2b^4 = 0 \quad || : a^2b^2$$

$$a^2m^2 - q^2 + b^2 = 0$$

$$a^2m^2 + b^2 = q^2 \quad \text{(BB)}$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$4a^4m^2q^2 - 4\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(a^2q^2 - a^2b^2\right) = 0 \quad || : 4$$

$$a^4m^2q^2 - \left(a^4m^2q^2 - a^4m^2b^2 + a^2b^2q^2 - a^2b^4\right) = 0$$

$$a^4m^2b^2 - a^2b^2q^2 + a^2b^4 = 0 \quad || : a^2b^2$$

$$a^2m^2 - q^2 + b^2 = 0$$

$$a^2m^2 + b^2 = q^2 \quad \text{(BB)}$$

(BB) ist die Berührbedingung

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

Die Gleichung (∗) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2 mq}{2(a^2 m^2 + b^2)}$$

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2 + b^2)} \stackrel{(BB)}{=} \frac{-a^2mq}{q^2}$$

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2+b^2)} \stackrel{\text{(BB)}}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2 + b^2)} \overset{(BB)}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q$$

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2 + b^2)} \stackrel{(BB)}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q = m \cdot \left(-\frac{a^2m}{q}\right) + q$$

Die Gleichung (∗) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2 + b^2)} \overset{\text{(BB)}}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q = m \cdot \left(-\frac{a^2m}{q}\right) + q = -\frac{a^2m^2}{q} + \frac{q^2}{q}$$

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2+b^2)} \overset{(BB)}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q = m \cdot \left(-\frac{a^2m}{q}\right) + q = -\frac{a^2m^2}{q} + \frac{q^2}{q}$$

$$= \frac{q^2 - a^2m^2}{q}$$

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2+b^2)} \overset{\text{(BB)}}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q = m \cdot \left(-\frac{a^2m}{q}\right) + q = -\frac{a^2m^2}{q} + \frac{q^2}{q}$$

$$= \frac{q^2 - a^2m^2}{q} \overset{\text{(BB)}}{=} \frac{b^2}{q}$$

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2 + b^2)} \overset{\text{(BB)}}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q = m \cdot \left(-\frac{a^2m}{q}\right) + q = -\frac{a^2m^2}{q} + \frac{q^2}{q}$$

$$= \frac{q^2 - a^2m^2}{q} \overset{\text{(BB)}}{=} \frac{b^2}{q}$$

Sind x_0, y_0 und a, b bekannt:

Die Gleichung $(*)$ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2+b^2)} \overset{\text{(BB)}}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q = m \cdot \left(-\frac{a^2m}{q}\right) + q = -\frac{a^2m^2}{q} + \frac{q^2}{q}$$

$$= \frac{q^2 - a^2m^2}{q} \overset{\text{(BB)}}{=} \frac{b^2}{q}$$

Sind x_0, y_0 und a, b bekannt:

$$q = \frac{b^2}{y_0}$$

Die Gleichung $(*)\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2+b^2)} \overset{(BB)}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q = m \cdot \left(-\frac{a^2m}{q}\right) + q = -\frac{a^2m^2}{q} + \frac{q^2}{q}$$

$$= \frac{q^2 - a^2m^2}{q} \overset{(BB)}{=} \frac{b^2}{q}$$

Sind x_0, y_0 und a, b bekannt:

$$q = \frac{b^2}{y_0} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{x_0 \cdot q}{a^2}$$

Die Gleichung $(*)\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ hat dann die Lösung:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2a^2mq}{2(a^2m^2 + b^2)} \stackrel{(BB)}{=} \frac{-a^2mq}{q^2} = -\frac{a^2m}{q}$$

Daraus folgt

$$y_0 = mx_0 + q = m \cdot \left(-\frac{a^2m}{q}\right) + q = -\frac{a^2m^2}{q} + \frac{q^2}{q}$$

$$= \frac{q^2 - a^2m^2}{q} \stackrel{(BB)}{=} \frac{b^2}{q}$$

Sind x_0, y_0 und a, b bekannt:

$$q = \frac{b^2}{y_0} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{x_0 \cdot q}{a^2} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

m und q in die Geradengleichung einsetzen:

$$y = mx + q$$

m und q in die Geradengleichung einsetzen:

$$y = mx + q$$

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot x + \frac{b^2}{y_0} \quad || \cdot a^2 y_0$$

m und q in die Geradengleichung einsetzen:

$$y = mx + q$$

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot x + \frac{b^2}{y_0} \quad || \cdot a^2 y_0$$

$$a^2 y_0 y = -b^2 x_0 x + a^2 b^2 \quad || + b^2 x_0 x$$

m und q in die Geradengleichung einsetzen:

$$y = mx + q$$

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot x + \frac{b^2}{y_0} \quad || \cdot a^2 y_0$$

$$a^2 y_0 y = -b^2 x_0 x + a^2 b^2 \quad || + b^2 x_0 x$$

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2 \quad || : a^2 b^2$$

m und q in die Geradengleichung einsetzen:

$$y = mx + q$$

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot x + \frac{b^2}{y_0} \quad || \cdot a^2 y_0$$

$$a^2 y_0 y = -b^2 x_0 x + a^2 b^2 \quad || + b^2 x_0 x$$

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2 \quad || : a^2 b^2$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Tangentengleichung im Ellipsenpunkt $P(x_0, y_0)$

Beispiel 2.1

Bestimme die Berührpunkte und die Gleichung der Tangenten an die Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

welche die Steigung $m = -\frac{1}{2}$ haben.

Offenbar sind $a = 3$ und $b = 2$

Offenbar sind $a = 3$ und $b = 2$

Tangentengleichung: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$

Offenbar sind $a = 3$ und $b = 2$

Tangentengleichung: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$

$a^2 y_0 y = -b^2 x_0 x + a^2 b^2$

Offenbar sind $a = 3$ und $b = 2$

Tangentengleichung: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$

$$a^2 y_0 y = -b^2 x_0 x + a^2 b^2$$

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot x + \frac{a^2 b^2}{a^2 y_0} = \underbrace{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}_{m} \cdot x + \underbrace{\frac{b^2}{y_0}}_{q}$$

Offenbar sind $a = 3$ und $b = 2$

Tangentengleichung: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$

$a^2 y_0 y = -b^2 x_0 x + a^2 b^2$

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot x + \frac{a^2 b^2}{a^2 y_0} = \underbrace{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}_{m} \cdot x + \underbrace{\frac{b^2}{y_0}}_{q}$$

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{9} \cdot \frac{x_0}{y_0} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4x_0 = \frac{9}{2} y_0 \quad \Rightarrow$$
$$x_0 = \frac{9}{8} y_0$$

Setze die Koordinaten in die Ellipsengleichung ein:

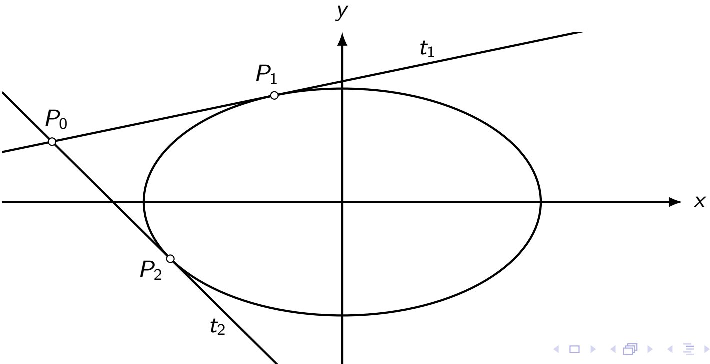
$$\begin{aligned}
\frac{(9y_0/8)^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} &= 1 \\
\frac{9y_0^2}{64} + \frac{y_0^2}{4} &= 1 \\
9y_0^2 + 16y_0^2 &= 64 \\
25y_0^2 &= 64 \\
y_0 &= \pm\frac{8}{5} \\
x_0 &= \frac{9}{8} \cdot \frac{\pm 8}{5} = \pm\frac{9}{5}
\end{aligned}$$

$P_1(1.8, 1.6),\ P_1(-1.8, -1.6)$

Polare einer Ellipse

Gegeben: Koordinatengleichung einer Ellipse und ein Punkt P_0 ausserhalb der Ellipse.

Gesucht: Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 von P an die Ellipse und die dazu gehörenden Berührpunkte P_1 und P_2.



Wir werden gleich sehen, dass wir auch bei dieser Aufgabe die oben hergeleitete Formel für die Tangente an eine Ellipse verwenden können.

Wir werden gleich sehen, dass wir auch bei dieser Aufgabe die oben hergeleitete Formel für die Tangente an eine Ellipse verwenden können.

$$t_1: \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$t_2: \frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1$$

Wir werden gleich sehen, dass wir auch bei dieser Aufgabe die oben hergeleitete Formel für die Tangente an eine Ellipse verwenden können.

$$t_1: \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$t_2: \frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1$$

offenbar erfüllt $P_0(x_0, y_0)$ beide Gleichungen:

Wir werden gleich sehen, dass wir auch bei dieser Aufgabe die oben hergeleitete Formel für die Tangente an eine Ellipse verwenden können.

$$t_1: \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$t_2: \frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1$$

offenbar erfüllt $P_0(x_0, y_0)$ beide Gleichungen:

$$\frac{x_1 x_0}{a^2} + \frac{y_1 y_0}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_2 x_0}{a^2} + \frac{y_2 y_0}{b^2} = 1$$

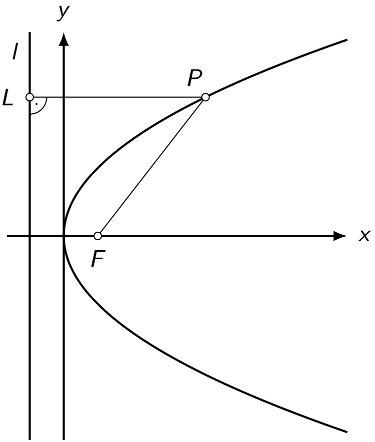
Nun ersetzen wir in diesen Gleichungen die Koordinaten x_1 und x_2 durch die unbestimmte Variable x sowie y_1 und y_2 durch die unbestimmte Variable y:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Was erhalten wir?

Eine Gleichung der Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 – die Polare des Punktes P_0 bezüglich der Ellipse.

Eine Parabel wird so in das Koordinatensystem gelegt, dass ihr Scheitelpunkt im Ursprung liegt und die Abszisse ihre Symmetrieachse ist



Ist p der Abstand des Brennpunkts F zur Leitgeraden l, so hat F die Koordinaten $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ und l die Gleichung $x = -\frac{p}{2}$.

Dann gilt für einen Punkt $P(x, y)$ auf der Parabel:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$-px + y^2 = px$$

$$y^2 = 2px$$

Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0, 0)$ und dem Brennpunkt $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$:

$$y^2 = 2px$$

Gleichung der Tangente

$$\begin{aligned} y^2 &= 2px & &\text{(Parabel)} \\ y &= mx + q & &\text{(Tangente)} \end{aligned}$$

Gleichung der Tangente

$$y^2 = 2px \qquad \text{(Parabel)}$$
$$y = mx + q \qquad \text{(Tangente)}$$

$$(mx+q)^2 = 2px$$

$$m^2x^2 + 2mqx + q^2 = 2px$$

$$\underbrace{m^2}_{\alpha}x^2 + \underbrace{2(mq-p)}_{\beta}x + \underbrace{q^2}_{\gamma} = 0 \qquad (**)$$

Die Gleichung $(**)$ hat genau eine Lösung, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

Die Gleichung $(**)$ hat genau eine Lösung, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

$$4(mq - p)^2 - 4m^2q^2 = 0$$

Die Gleichung $(**)$ hat genau eine Lösung, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

$$4(mq - p)^2 - 4m^2q^2 = 0$$

$$(mq - p)^2 - m^2q^2 = 0$$

Die Gleichung $(**)$ hat genau eine Lösung, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

$$
\begin{aligned}
4(mq-p)^2 - 4m^2q^2 &= 0 \\
(mq-p)^2 - m^2q^2 &= 0 \\
m^2q^2 - 2mpq + p^2 - m^2q^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $(**)$ hat genau eine Lösung, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

$$4(mq - p)^2 - 4m^2q^2 = 0$$

$$(mq - p)^2 - m^2q^2 = 0$$

$$m^2q^2 - 2mpq + p^2 - m^2q^2 = 0$$

$$p^2 = 2mpq \quad || : p \neq 0$$

Die Gleichung $(**)$ hat genau eine Lösung, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

$$4(mq - p)^2 - 4m^2q^2 = 0$$

$$(mq - p)^2 - m^2q^2 = 0$$

$$m^2q^2 - 2mpq + p^2 - m^2q^2 = 0$$

$$p^2 = 2mpq \quad || : p \neq 0$$

$$p = 2mq \quad \text{(BB)}$$

Koordinaten des Berührpunkts:

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq - p)}{2m^2}$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq - p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq - 2mq)}{m^2}$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2}$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq - p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq - 2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq - p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq - 2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq - p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq - 2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq - p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq - 2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q = \frac{p}{m}$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \stackrel{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q = \frac{p}{m}$$

Tangentengleichung:

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q = \frac{p}{m}$$

Tangentengleichung:

$$y = mx + q$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q = \frac{p}{m}$$

Tangentengleichung:

$$y = mx + q = mx + mx_0$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q = \frac{p}{m}$$

Tangentengleichung:

$$y = mx + q = mx + mx_0 = m(x + x_0)$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q = \frac{p}{m}$$

Tangentengleichung:

$$y = mx + q = mx + mx_0 = m(x + x_0) = \frac{p}{y_0}(x + x_0)$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q = \frac{p}{m}$$

Tangentengleichung:

$$y = mx + q = mx + mx_0 = m(x + x_0) = \frac{p}{y_0}(x + x_0)$$

Koordinaten des Berührpunkts:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-2(mq-p)}{2m^2} \overset{\text{BB}}{=} \frac{-(mq-2mq)}{m^2} = \frac{mq}{m^2} = \frac{q}{m}$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q = m \cdot \frac{q}{m} + q = q + q = 2q = \frac{p}{m}$$

Tangentengleichung:

$$y = mx + q = mx + mx_0 = m(x + x_0) = \frac{p}{y_0}(x + x_0)$$

$$y_0 y = p(x + x_0)$$

Gleichung der Polaren

Die Gleichung der Polare der Parabel mit der Gleichung $y = 2px$ bezüglich des Punktes $P(x_0, y_0)$ lässt sich analog zum Fall der Ellipse herleiten und lautet entsprechend:

$$y_0 y = p(x + x_0)$$

Beispiel 2.2

Bestimme die Berührungspunkte und die Gleichungen der beiden Tangenten an die Parabel mit der Gleichung $p\colon y^2 = 4x$, die durch den Punkt $P(-2, 1)$ gehen.

$$2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$$

$$2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$$

P liegt nicht auf der Parabel, denn $1^2 \neq 4 \cdot (-2)$.

$2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$

P liegt nicht auf der Parabel, denn $1^2 \neq 4 \cdot (-2)$.

Polare: $g: y = 2(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 4$

$2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$

P liegt nicht auf der Parabel, denn $1^2 \neq 4 \cdot (-2)$.

Polare: $g: y = 2(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 4$

Schnittpunkte von Polare und Parabel:

$2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$

P liegt nicht auf der Parabel, denn $1^2 \neq 4 \cdot (-2)$.

Polare: $g\colon y = 2(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 4$

Schnittpunkte von Polare und Parabel:

$$\begin{aligned}
(2x-4)^2 &= 4x \\
4x^2 - 16x + 16 &= 4x \\
4x^2 - 20x + 16 &= 0 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
(x-1)(x-4) &= 0
\end{aligned}$$

$$x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad B_1 = (1, -2)$$

$$x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad B_2 = (4, 4)$$

Berührpunkte in die Tangentengleichungen einsetzen:

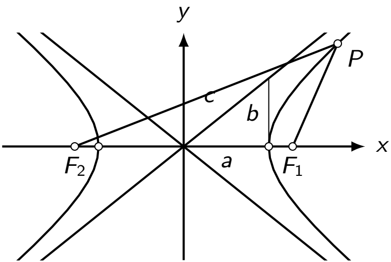
Berührpunkte in die Tangentengleichungen einsetzen:

$t_1: \ -2y = 2(x+1) \quad \Rightarrow \quad t_1: y = -x - 1$

$t_2: 4y = 2(x+4) \quad \Rightarrow \quad t_2: y = \frac{1}{2}x + 2$

Gegeben ist eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Hyperbel, deren Hauptachse mit der x-Achse zusammenfällt.

Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(c, 0)$ und $F_2(-c, 0)$ und die Scheitelpunkte $S_1(a, 0)$ bzw. $S_2(-a, 0)$ mit $c > a$. Wir legen eine Strecke der Länge b durch die Beziehung $b^2 = c^2 - a^2$ fest.



Für einen Punkt $P(x, y)$ auf der Hyperbel gilt:

Für einen Punkt $P(x, y)$ auf der Hyperbel gilt:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = x^2 - 2xc + c^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Mit $b^2 = c^2 - a^2$ erhält man die Gleichung einer zu den Koordinatenachsen symmetrischen Hyperbel, deren Scheitelpunkte auf der x-Achse liegen und den Abstand $2a$ haben. Dabei fallen die Hyperbelachsen mit den Koordinatenachsen zusammen.

Mit $b^2 = c^2 - a^2$ erhält man die Gleichung einer zu den Koordinatenachsen symmetrischen Hyperbel, deren Scheitelpunkte auf der x-Achse liegen und den Abstand $2a$ haben. Dabei fallen die Hyperbelachsen mit den Koordinatenachsen zusammen.

$$x^2 b^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bemerkungen

- Die Streckenlänge b mit $b^2 = c^2 - a^2$ ist die imaginäre Halbachse der Hyperbel.

Bemerkungen

- Die Streckenlänge b mit $b^2 = c^2 - a^2$ ist die imaginäre Halbachse der Hyperbel.
- Die Punkte $S_3(0, b)$ und $S_4(0, -b)$ nennt man die Nebenscheitel der Hyperbel.

Bemerkungen

- Die Streckenlänge b mit $b^2 = c^2 - a^2$ ist die imaginäre Halbachse der Hyperbel.
- Die Punkte $S_3(0, b)$ und $S_4(0, -b)$ nennt man die Nebenscheitel der Hyperbel.
- Löst man die Hyperbelgleichung nach y auf, so erhält man für für grosse $|x|$:

Bemerkungen

- Die Streckenlänge b mit $b^2 = c^2 - a^2$ ist die imaginäre Halbachse der Hyperbel.
- Die Punkte $S_3(0, b)$ und $S_4(0, -b)$ nennt man die Nebenscheitel der Hyperbel.
- Löst man die Hyperbelgleichung nach y auf, so erhält man für für grosse $|x|$:

$$y = \pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} \approx \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2} = \pm\frac{b}{a}x$$

Bemerkungen

- Die Streckenlänge b mit $b^2 = c^2 - a^2$ ist die imaginäre Halbachse der Hyperbel.
- Die Punkte $S_3(0, b)$ und $S_4(0, -b)$ nennt man die Nebenscheitel der Hyperbel.
- Löst man die Hyperbelgleichung nach y auf, so erhält man für für grosse $|x|$:

$$y = \pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} \approx \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2} = \pm\frac{b}{a}x$$

Die Geraden $y = \pm\frac{b}{a}x$ sind die Asymptoten der Hyperbel.

Analog wie bei der Ellipse erhalten wir die Gleichung der Tangente für einen Hyperbelpunkt bzw. die Gleichung der Polare für einen Punkt $P(x_0, y_0)$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Beispiel 2.3

Bestimme die Berührpunkte der beiden Tangenten vom Punkt $Q(2,2)$ aus an die Hyperbel mit der Gleichung

$$h\colon \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Gleichung der Polare

$$\frac{2x}{4} - \frac{2y}{9} = 1$$

$$\frac{x}{2} - \frac{2y}{9} = 1$$

$$9x - 4y = 18$$

$$y = \frac{9x - 18}{4}$$

$p \cap h$:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

$$9x^2 - \frac{(9x-18)^2}{4} = 36$$

$$36x^2 - (9x-18)^2 = 144$$

$$36x^2 - (81x^2 - 324x + 324) = 144$$