Geometrie und Computergrafik

Übungen

Aufgabe 1.1

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Berechne $-2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Aufgabe 1.1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$-2\vec{a} + 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2

$(3, -5, 8)^{\mathsf{T}}$?

Aufgabe 1.2

$$(3, -5, 8)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.3

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Aufgabe 1.3

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Aufgabe 1.3

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Löse die Gleichung $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$

Aufgabe 1.3

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Löse die Gleichung $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$

$1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0$

$5 \cdot x - 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0$

$4 \cdot x + 6 \cdot y + 2 \cdot z = 0$

Taschenrechner: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Also sind die Vektoren linear unabhäangig.

Aufgabe 1.4

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 1.4

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) + 1 \cdot 7 = 18$$

Aufgabe 1.5

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Aufgabe 1.5

$$\text{Gegeben: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.5

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 9 + 3 \cdot 1 = 0$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal.

Aufgabe 1.6

Gegeben: $\vec{a} = (3, -2, 1, 5)^{\mathsf{T}}$

Gesucht: $|\vec{a}|$

Aufgabe 1.6

Gegeben: $\vec{a} = (3, -2, 1, 5)$

Gesucht: $|\vec{a}|$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{39}$$

Aufgabe 1.7

Gegeben: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$

Gesucht: Vektor $\vec{u}$ mit der Richtung von $\vec{v}$ und der Länge $|\vec{u}| = 1$.

Aufgabe 1.7

Gegeben: $\vec{v} = (20, -9, 12)$

Gesucht: Vektor $\vec{u}$ mit der Richtung von $\vec{v}$ und der Länge $|\vec{u}| = 1$.

Aufgabe 1.7

Gegeben: $\vec{v} = (20, -9, 12)$

Gesucht: Vektor $\vec{u}$ mit der Richtung von $\vec{v}$ und der Länge $|\vec{u}| = 1$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{625} = 25$$

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.36 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.9

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{a}$

Aufgabe 1.9

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.9

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.9

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.1

Stelle den Punkt $P(-1, 8)$ mit homogenen Koordinaten dar.

Aufgabe 2.1

$$P(-1, 8) \leftrightarrow P(-1{:}8{:}1)$$

Aufgabe 2.2

Stelle den Punkt $P(-8{:}6{:}-2)$ mit inhomogenen Koordinaten dar.

Aufgabe 2.2

$P(-8{:}6{:},)-2 \leftrightarrow P(4,-3)$

Aufgabe 2.3

Bestimme eine Koordinatengleichung der Gerade durch die Punkte $A(5,3)$ und $B(1,2)$ mittels homogener Koordinaten.

Aufgabe 2.3

$$\begin{pmatrix} (\\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g : x - 4y + 7 = 0$$

Aufgabe 2.4

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit den Gleichungen $g\colon 2x - 5y + 3 = 0$ und $h\colon 4x + 2y - 1 = 0$ mittels homogener Koordinaten.

Aufgabe 2.4

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(-1/24, 7/12)$$

Aufgabe 2.5

Bestimme eine Gleichung der Geraden s, die durch den Schnittpunkt S_1 der Geraden mit den Gleichungen

$g_1: 5x + 2y + 1 = 0$ und $h_1: \; -x + 7y = 0$

sowie durch den Schnittpunkt S_2 der Geraden mit den Gleichungen

$g_2: 3y + 4 = 0$ und $h_2: 6x + 8y + 9 = 0$

geht.

Aufgabe 2.5

$$\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-1\\37\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\24\\-18\end{pmatrix}$$

Die Berechnung der affinen Koordinaten ist überflüssig.

$$\begin{pmatrix}-7\\-1\\37\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\24\\-18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-870\\-311\\-173\end{pmatrix}$$

$s: \ -870x - 311y - 173 = 0$

Aufgabe 2.6

Weise nach, dass die Geraden $g\colon\ -4x + 6y + 5 = 0$ und $h\colon 6x - 9y + 1 = 0$ parallel sind, indem du zeigst, dass sie sich in einem Fernpunkt schneiden.

Aufgabe 2.6

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fernpunkt, da die (homogene) z-Koordinate des „Schnittpunkts“ null ist.

Aufgabe 2.7

Gegeben sind die Punkte $P(3,4)$ und $Q(5,5)$. Bestimme eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P und den Fernpunkt in Richtung von $\overrightarrow{OQ}$ geht.

Aufgabe 2.7

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$g: x - y + 1 = 0$ (Gerade durch P, parallel zu $\overrightarrow{OQ}$)

Aufgabe 2.8

Gegeben sind die Punkte $P(3,4)$ und $Q(5,5)$. Erhält man ein sinnvolles Resultat, wenn man mittels homogener Koordinaten eine Gleichung der Geraden durch die Fernpunkte der Richtungen $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ bestimmt?

Aufgabe 2.8

$$(3, 4, 0)^T \times (5, 5, 0)^T = (0, 0, -5)^T$$

$$s: \ -5 = 0$$

Das ist kein sinnvolles Ergebnis.

Aufgabe 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen können nicht addiert werden, da sie nicht dieselbe Dimension haben.

Aufgabe 3.3

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ -10 & 0 & -4 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Aufgabe 3.4

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.5

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Aufgabe 3.5

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.6

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 9 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Aufgabe 3.6

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 9 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.7

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.7

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 22 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.9

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.9

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.12

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.12

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.13

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.13

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.14

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.14

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.16

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.16

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 & 18 \\ 21 & 8 & 18 \\ 21 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.17

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.17

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 8 \\ 41 & 18 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.18

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.18

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 18 & 41 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.1

Verschiebe den Punkt $P(4,5)$ um den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe einer geeigneten Matrix.

Aufgabe 4.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.2

Strecke den Punkt $P(4, 5)$ am Ursprung mit den Faktoren $k_x = 2$ und $k_y = -1$. Verwende eine geeignete Matrix.

Aufgabe 4.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.3

Drehe den Punkt $P(4, 5)$ am Ursprung um den Winkel $\varphi = 90^\circ$ mit Hilfe einer geeigneten Matrix.

Aufgabe 4.3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4

Ein Punkt in der Ebene soll am Ursprung um den Winkel $\varphi = 90^\circ$ gedreht und anschliessend um den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ verschoben werden. Bestimme die Matrix der gesamten Abbildung.

Aufgabe 4.4

$$M = T \circ R$$

Aufgabe 4.4

$$M = T \circ R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4

$$M = T \circ R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4

$$M = T \circ R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.5

Ein Punkt in der Ebene soll um den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ verschoben und anschliessend am Ursprung um den Winkel $\varphi = 90^\circ$ gedreht werden. Bestimme die Matrix der gesamten Abbildung.

Aufgabe 4.5

$$M = R \circ T$$

Aufgabe 4.5

$$M = R \circ T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.5

$$M = R \circ T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.5

$$M = R \circ T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.6

Ein beliebiger Punkt soll am Zentrum $Z(5,4)$ um den Winkel $\varphi = 90^\circ$ gedreht werden. Bestimme die Matrix dieser Abbildung.

Aufgabe 4.6

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ R \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

Aufgabe 4.6

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ R \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.6

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ R \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.6

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ R \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.6

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ R \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.6

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ R \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 4.6

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ R \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.7

Ein beliebiger Punkt soll am Zentrum $Z(3, 4)$ mit den Faktoren $k_x = 2$ und $k_y = 2$ skaliert (gestreckt) werden. Bestimme die Matrix dieser Abbildung.

Aufgabe 4.7

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ S \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

Aufgabe 4.7

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ S \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.7

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ S \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.7

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ S \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.7

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ S \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.7

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ S \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 4.7

$$M = T_{\vec{r}_Z} \circ S \circ T_{-\vec{r}_Z}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$