
Geometrie und Computergrafik

Theorie

1 Vektorräume und Vektoren

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Die Menge aller n -Tupel mit reellen Komponenten

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

bildet zusammen mit der koordinatenweise definierten Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation mit einem Skalar (=Zahl)

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \dots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}$$

einen sogenannten *Vektorraum*.

Die Darstellung von Vektoren

Vektoren werden mit Pfeil gekennzeichnet: und normalerweise als *Spaltenvektoren*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

oder manchmal als *transponierte Zeilenvektoren*

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

dargestellt, wobei das hochgestellt T bedeutet, dass aus einem Spalten- ein Zeilenvektor oder umgekehrt aus einem Zeilen- ein Spaltenvektor gemacht wird. Gelegentlich wird Transposition verwendet, um bei der Darstellung von Vektoren Platz zu sparen.

Der Vektor $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ wird *Nullvektor* genannt.

Linearkombinationen in $\mathbb{R}^n$

Sind $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, so wird

$$\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k$$

Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ genannt.

Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k = \vec{0}$$

nur die (triviale) Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ hat.

Andernfalls heißen die Vektoren *linear abhängig*.

Wenn k Vektoren linear abhängig sind, dann kann mindestens einer dieser Vektoren durch eine geeignete Linearkombination der anderen $k - 1$ Vektoren dargestellt werden.

Basis des $\mathbb{R}^n$

Eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ wird *Basis* des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ genannt.

Beispiel: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die *Standardbasis* des $\mathbb{R}^n$.

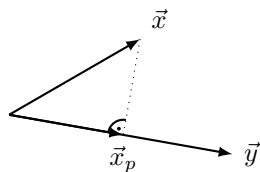
Das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

Sind $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^n$, so ist ihr Skalarprodukt wie folgt definiert:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Beachte: Das Skalarprodukt ergibt einen Skalar und keinen Vektor.

Geometrische Deutung: $\vec{x} \cdot \vec{y}$ entspricht dem Produkt aus der Länge des auf den Vektor $\vec{y}$ projizierten Vektors $\vec{x}$ multipliziert mit der Länge des Vektors $\vec{y}$.



Die Länge eines Vektors

Ist $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ ein Vektor in $\mathbb{R}^n$, so lässt sich seine Länge $|\vec{x}|$ (Betrag von $\vec{x}$) indirekt über das Skalarprodukt von $\vec{x}$ mit sich selber ausdrücken:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

Beispiel: $\vec{x} = (1, -2, 0, 4)^\top \in \mathbb{R}^4$

$|\vec{x}| =$

Orthogonalität von Vektoren

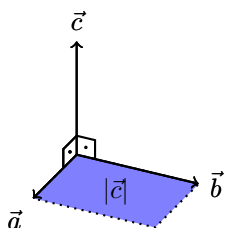
Zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \neq \vec{0}$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top \neq \vec{0}$ in $\mathbb{R}^n$ heissen *orthogonal* oder *senkrecht* (in Zeichen: $\vec{x} \perp \vec{y}$), wenn

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Beispiel: Die Vektoren $\vec{x} = (0, 2, 2, 5)^\top$ und $\vec{y} = (9, 3, -8, 2)^\top$ in $\mathbb{R}^4$ sind orthogonal, da $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-8) + 5 \cdot 2 = 0$.

Das Kreuzprodukt (Definition)

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist *das Kreuzprodukt* (*Vektorprodukt*) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie folgt definiert:



- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $|\vec{c}|$ ist gleich der Flächenmasszahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein rechtsdrehendes Koordinatensystem (*Rechtssystem*).

Das Kreuzprodukt in Koordinatendarstellung

In der Komponentendarstellung gibt es eine einzige Vorschrift, die alle drei Bedingungen der Definition des Kreuzproduktes erfüllt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiele

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} =$

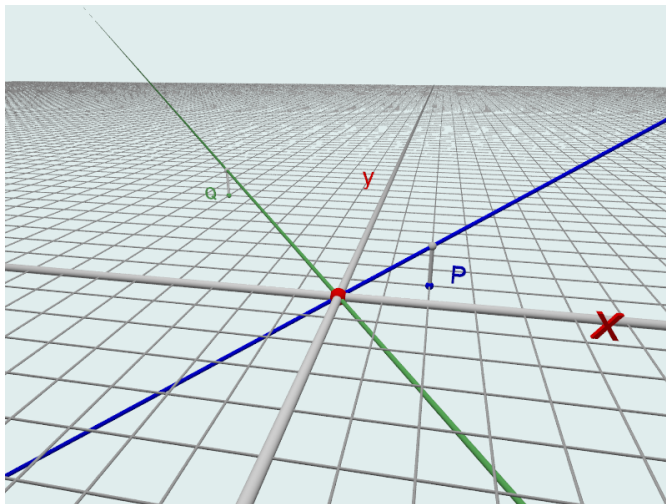


Abbildung 1: Je weiter der Punkt Q vom Ursprung entfernt ist, umso weniger steigt die Gerade OQ in z -Richtung an.

2 Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten für Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$

Wir identifizieren jeden Punkt $P(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit der Menge aller Punkte $P(tx_1, tx_2, t)$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dies ist die Menge der Punkte auf der Geraden durch $(0, 0, 0)$ und $(x_1, x_2, 1)$, aus der wir den Ursprung $(0, 0, 0)$ entfernt haben.

Diese Punktmenge können wir durch sogenannten homogenen Koordinaten $(tx_1:tx_2:t)$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ darstellen und mit dem ursprünglichen Punkt (x_1, x_2) identifizieren:

$$(x_1, x_2) \leftrightarrow (tx_1:tx_2:t) \text{ mit } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Darstellung von Punkten in $\mathbb{R}^2$

Ein erster Vorteil dieser Darstellung besteht darin, dass ein Punkt der Ebene, der auf der Geraden durch $(0, 0)$ und (x_1, x_2) unendlich weit weg liegt, eindeutig durch die homogenen Koordinaten $(x_1:x_2:0)$ repräsentiert werden kann.

Darstellung von Geraden in $\mathbb{R}^2$

Ein Gerade $g: ax + by + c = 0$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ besteht aus unendlich vielen Punkten zu denen es jeweils eine „homogene Gerade“ gibt. Diese Geraden bilden eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung mit der Gleichung $ax + by + cz = 0$. Eine unendlich weit entfernte Gerade hat dann die homogenen Koordinaten $(0:0:c)$.

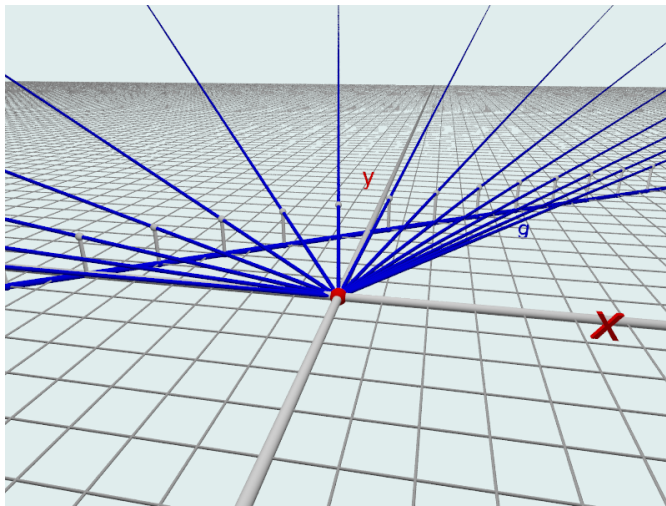


Abbildung 2: Einige Raumgeraden zu den Punkten der ebenen Geraden g , bilden eine Ebene, die durch $(0, 0, 0)$ geht.

Eine erste Anwendung homogener Koordinaten

Homogene Koordinaten ermöglichen eine einheitliche Berechnung ...

- (a) der Geraden g durch zwei gegebene Punkte P und Q ,
- (b) des Schnittpunktes S von zwei Geraden g und h .

Dies auch dann wenn es sich um Fernelemente oder parallele Geraden handelt.

Beispiel 1

Gesucht: Gleichung der Geraden durch die Punkte $P(3, 2)$ und $Q(-1, 4)$.

Beispiel 2

Gesucht: Schnittpunkt S der Geraden $g: 2x - 3y + 1 = 0$ und $h: x + 2y - 3 = 0$.

Beispiel 3

Gesucht: Schnittpunkt der parallelen(!) Geraden $g: y = \frac{1}{2}x + 3$ und $h: y = \frac{1}{2}x + 1$.

Beispiel 4

Gesucht: Gleichung der Geraden g durch den Punkt $P(5, 4)$ und den Fernpunkt vom Ursprung in Richtung $Q(3, 2)$.

Eine zweite Anwendung homogener Koordinaten

Mit Hilfe homogener Koordinatenvektoren lassen sich die Transformationen der Ebene oder des Raumes (Translationen, Spiegelungen, Drehungen und zentrische Streckungen) in einheitlicher Form darstellen.

Für diese einheitliche Darstellung benötigen wir ein weiteres Rechenwerkzeug: Matrizen

3 Matrizen

Matrizen

Eine $m \times n$ -Matrix (Mehrzahl: *Matrizen*) ist ein rechteckiges Zahlenschema bestehend aus m Zeilen und n Spalten. Eine Matrix mit gleich vielen Zeilen und Spalten wird *quadratisch* genannt.

- $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$
- $(9 \quad 2 \quad 1 \quad -5 \quad 4)$

(Koordinaten-)Vektoren können als spezielle Matrizen aufgefasst werden die nur aus einer Zeile bzw. einer Spalte bestehen.

Transposition von Matrizen

Die Elemente einer Matrix werden durch ihre jeweiligen Zeilen- und Spaltenindizes (in dieser Reihenfolge) gekennzeichnet.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{2,3} =$$

Ist A eine $m \times n$ -Matrix, so erhält man die Elemente der *transponierten Matrix* A^T durch Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindizes: $A_{i,j}^T = A_{j,i}$. *Beispiele:*

$$(a) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T =$$

$$(b) \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T =$$

Addition und Multiplikation mit Skalaren

- Matrizen können wie Vektoren addiert werden, wenn sie in Zeilen- und Spaltenzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -7 & 9 & 5 \end{pmatrix} =$$

- Auch die Multiplikation mit Skalaren ist elementweise definiert:

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

- Wie wir gleich sehen werden, ist die Multiplikation von Matrizen *nicht* analog zur Addition definiert.

Multiplikation von Matrizen

Voraussetzung: Eine $m_A \times n_A$ -Matrix A kann nur dann mit einer $m_B \times n_B$ -Matrix B multipliziert werden, wenn $n_A = m_B$ gilt, d.h. wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt. Das Resultat $A \cdot B$ ist dann eine $m_A \times n_B$ -Matrix.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ 9 & -3 \\ 13 & -2 \end{pmatrix}$$

Das Element in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte der Produktmatrix AB ist definiert als das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der transponierten j -ten Spalte von B .

Neutrale Elemente

- Das neutrale Element der Matrizenaddition ist die *Nullmatrix*.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

- Das neutrale Element der Matrizenmultiplikation ist die *Einheitsmatrix*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

4 Geometrische Transformationen

Die Translation

Die Verschiebung eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ um den Vektor $(\Delta x, \Delta y)^T$ lässt sich mit Hilfe homogener Koordinaten wie folgt durch eine Matrizenmultiplikation realisieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Analog lässt sich eine Translation im Raum definieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Skalierung

Eine (nichtuniforme) Streckung eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ am Ursprung mit den Faktoren k_x und k_y lässt sich mit Hilfe homogener Koordinaten wie folgt durch eine Matrizenmultiplikation realisieren:

$$\begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Analog lässt sich eine Skalierung im Raum definieren:

$$\begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Rotationen im $\mathbb{R}^2$

Die Drehung eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ am Ursprung um den Winkel φ lässt sich mit Hilfe homogener Koordinaten wie folgt durch eine Matrizenmultiplikation realisieren:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Rotationen im $\mathbb{R}^3$

Die Bausteine für die Rotationen im Raum sind die Rotationen an den einzelnen Koordinatenachsen:

- Drehung um φ an der x -Achse:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Drehung um φ an der y -Achse:
$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Drehung um φ an der z -Achse:
$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelungen

Achsen- und Punktspiegelungen in $\mathbb{R}^2$ lassen sich als Spezialfall von Skalierungen darstellen. Spiegelung von (x, y) an der ...

- x -Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$
- y -Achse: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$
- am Ursprung $(0, 0)$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$

Es ist nicht schwierig, die Spiegelung von Punkten im $\mathbb{R}^3$ am Ursprung, an den Koordinatenachsen und an den Koordinatenebenen zu definieren.

Verknüpfungen (Verkettungen)

Möchte man mehrere der oben genannten Abbildungen nacheinander ausführen, so genügt es, die dazu gehörenden Abbildungsmatrizen zu multiplizieren um eine einfache Darstellung für die gesamte Abbildung zu erhalten. *Beachte:* Die Matrix der zuerst auszuführenden Abbildung steht im Produkt ganz links.

Beispiel: Führe zuerst eine Translation um $(3, 4)$ und anschliessend eine Streckung mit den Faktoren $k_x = k_y = 2$ aus:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

umgekehrt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

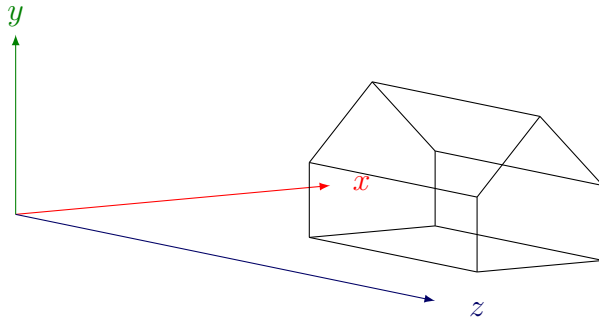
Inverse Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

Abbildung	inverse Abbildung
Translation um $(\Delta x, \Delta y)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Translation um $(-\Delta x, -\Delta y)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Skalierung um (k_x, k_y) : $\begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Skalierung um $(1/k_x, 1/k_y)$: $\begin{pmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rotation um $(0, 0)$ mit φ : $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Rotation um $(0, 0)$ mit $-\varphi$: $\begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) & 0 \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 Ansichten im Raum

Das Koordinatensystem

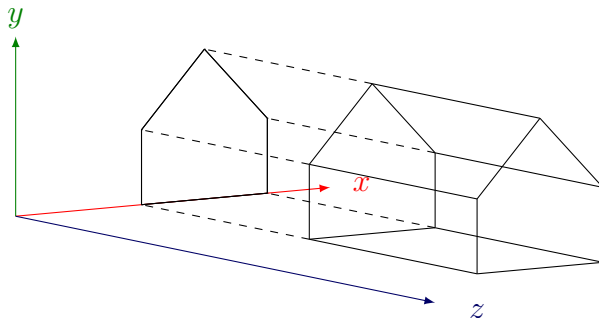
Wir wählen zunächst ein Koordinatensystem, in dem die Objekte der „Welt“ auf der xz -Ebene stehen und eine positive z -Koordinaten haben.



Als Bildebene π wählen wir die xy -Ebene. So können wir die Bildpunkte in der üblichen Weise mit einer x - und einer y -Koordinate beschreiben.

Parallelprojektion

Die (Eck-)Punkte der Weltobjekte werden parallel zur z -Richtung auf die Bildebene π projiziert. Da hier die Projektionsrichtung senkrecht zur Bildebene steht, spricht man von einer *Normalprojektion*.



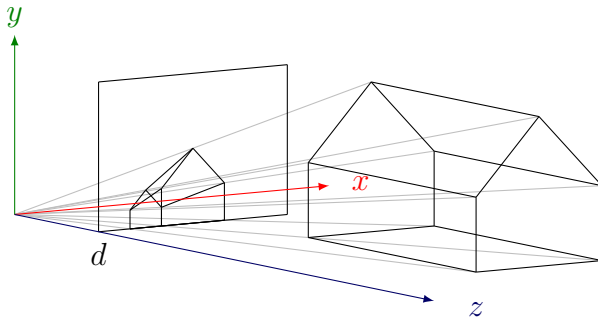
Parallelprojektion (Matrixdarstellung)

Für diese Projektion müssen wir nur die dritte (und vierte) Koordinate entfernen. Diese Abbildung lässt sich z. B. durch folgende Matrix(multiplikation) realisieren:

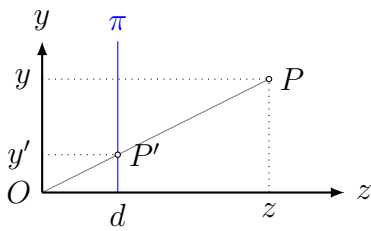
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zentralprojektion

Die (Eck-)Punkte der Weltobjekte werden auf Strahlen durch den Koordinatenursprung auf eine zur xy -Ebene parallele Ebene mit der z -Koordinate d projiziert.



Zentralprojektion (Matrixdarstellung)



Zweiter Strahlensatz:

$$y' : d = y : z$$

$$y' \cdot z = y \cdot d$$

$$y' = y \cdot d / z$$

Analog leitet man $x' = x \cdot d / z$ für die x -Koordinate her.

Die Zentralprojektion lässt sich nun wie folgt realisieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ z/d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot d/z \\ y \cdot d/z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Nullzeile sorgt dafür, dass der Bildpunkt P' noch von π ($z = d$) senkrecht auf die xy -Ebene ($z = 0$) projiziert wird.

Anwendungsgebiete

- Die Parallelprojektion stellt Objekte, die senkrecht zur Abbildungsrichtung stehen, unverzerrt dar. Deshalb wird sie oft für Darstellungen in Plänen verwendet.
- Die Zentralprojektion stellt eine Länge, um so kürzer dar, je weiter sie vom Projektionszentrum entfernt ist (*perspektivische Verkürzung*). Dies entspricht grob der Funktionsweise unseres Auges. Daher eignet sich die Zentralprojektion für realistische Darstellungen dreidimensionaler Objekte.

Zusammenfassung

Bisher :

Abbildungstyp	Bildebene	Richtung	Betrachter
Parallelprojektion	$z = 0$	z -Richtung	$(0, 0, -\infty)$
Zentralprojektion	$z = d$	Alle	$(0, 0, 0)$

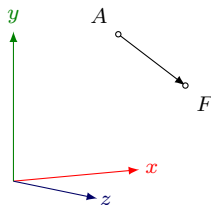
Die Parallelprojektion geht in eine Zentralprojektion über, indem man das Projektionszentrum (die Position des Auges) immer weiter von der Welt weg verschiebt.

Wie können wir eine beliebige Ansicht auf die Objekte der Welt realisieren?

Die Ansichtstransformation (1)

Wir stellen uns einen Betrachter (Auge, Kamera) im Punkt A (VRP: *View Reference Point*) vor.

Dieser Betrachter blickt in Richtung eines Punktes F (FP: *focus point, look at*)

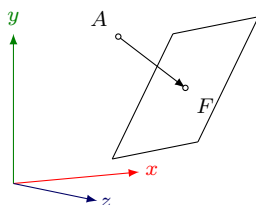


Parallelprojektion: $\overrightarrow{AF}$ (*eye vector*) ist die Projektionsrichtung.

Zentralprojektion: Die Gerade durch A und F definiert die *optische Achse*. Die Länge $|\overrightarrow{AF}|$ interpretieren wir als Abstand d des Auges von der Bildebene.

Die Ansichtstransformation (2)

Wenn wir voraussetzen, dass die Bildebene π senkrecht zur Projektionsrichtung bzw. zur optischen Achse steht, so ist $\overrightarrow{AP}$ ein Normalenvektor zu π . (VPN: *View-Plane Normal*)



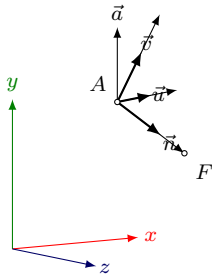
Unser nächstes Ziel ist es, ein *lokales orthonormiertes Koordinatensystem* im Punkt A zu definieren, dessen z -Achse durch die Richtung $\overrightarrow{AF}$ definiert wird.

Die Ansichtstransformation (3)

Wir wählen einen Hilfsvektor $\vec{a}$, der im lokalen Koordinatensystems tendenziell „nach oben“ zeigt.

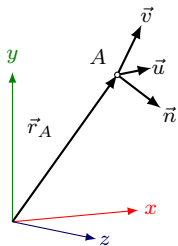
Dann bilden wir das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{n}$ und normieren es. So erhalten wir den Vektor $\vec{u}$, der insbesondere senkrecht auf $\vec{n}$ steht.

Berechnen wir das Vektorprodukt $\vec{n} \times \vec{u}$ und normieren es, so erhalten wir den Vektor $\vec{v}$, der senkrecht auf $\vec{n}$ und $\vec{u}$ steht.



Beim Rechnen mit Taschenrechnern empfiehlt es sich, die Normierung der Basisvektoren erst am Schluss durchzuführen.

Die Ansichtstransformation (4)



Um die vorbereitete Ansichtstransformation durchzuführen, verschieben wir mit der Matrix den Augpunkt in den Ursprung des globalen Koordinatensystems und drehen das globale Koordinatensystem mit Hilfe der Basisvektoren des lokalen Koordinatensystems.

$$M = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_A \\ 0 & 1 & 0 & -y_A \\ 0 & 0 & 1 & -z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$