Aufgabe 1.1

Berechne $-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.1

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

Gesucht: $3\vec{a} - 2\vec{b}$

Aufgabe 1.2

$$3\begin{pmatrix}-8\\8\\7\\4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\\-7\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24\\22\\35\\-2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.3

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = ?$$

Aufgabe 1.3

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig? Begründe die Antwort.

Aufgabe 1.4

Löse die Gleichung $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} 9 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 0 \\ -4 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z &= 0 \\ 9 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

Taschenrechner: unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear abhängig.

Aufgabe 1.5

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig? Begründe die Antwort.

Aufgabe 1.5

Löse die Gleichung $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$

$$-1 \cdot x + 1 \cdot y + 9 \cdot z = 0$$
$$4 \cdot x + 0 \cdot y + 6 \cdot z = 0$$
$$7 \cdot x + 9 \cdot y + 2 \cdot z = 0$$

Taschenrechner: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig.

Aufgabe 1.6

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 1.6

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -22$$

Aufgabe 1.7

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Aufgabe 1.7

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal.

Aufgabe 1.8

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -16 \\ 19 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}$ Gesucht: $|\vec{a}|$

Aufgabe 1.8

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{877} = 29.614$$

Aufgabe 1.9

Gegeben: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Gesucht: Vektor $\vec{u}$ mit der Richtung von $\vec{v}$ und der Länge $|\vec{u}| = 1$.

Aufgabe 1.9

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 5$$

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.0 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.10

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{a}$

Aufgabe 1.10

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$
- $\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.11

Berechne mit dem Vektorprodukt den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $A(9, 5)$, $B(4, 3)$ und $C(9, 3)$.

Aufgabe 1.11

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = 5.0$$

Aufgabe 2.1

Stelle den Vektor $\vec{a} = (-1, 8) \in \mathbb{R}^2$ als homogenen Koordinatenvektor $\underline{\vec{a}} \in \mathbb{R}^3$ dar.

Aufgabe 2.1

$$\underline{\vec{a}} = (-1, 8, 1)$$

Aufgabe 2.2

Stelle den homogenen Koordinatenvektor $\underline{\vec{a}} = (7, -5, 5) \in \mathbb{R}^3$ als einfachen Koordinatenvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ dar.

Aufgabe 2.2

$\vec{a} = (7/5, -1)$

Aufgabe 2.3

Bestimme eine Koordinatengleichung der Gerade durch die Punkte $A(5,3)$ und $B(1,2)$ mittels homogener Koordinaten.

Aufgabe 2.3

$$(5,3,1)^T \times (1,2,1)^T = (1,-4,7)^T$$

$$\Rightarrow g : x - 4y + 7 = 0$$

Aufgabe 2.4

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit den Gleichungen $g\colon 2x - 5y + 3 = 0$ und $h\colon 4x + 2y - 1 = 0$ mittels homogener Koordinaten.

Aufgabe 2.4

$$(2,-5,3)^T \times (4,2,-1)^T = (-1,14,24)^T$$

$$\Rightarrow S(-1/24, 7/12)$$

Aufgabe 2.5

Bestimme eine Gleichung der Geraden s, die durch den Schnittpunkt S_1 der Geraden mit den Gleichungen

$g_1\colon 5x + 2y + 1 = 0$ und $h_1\colon -x + 7y = 0$

sowie durch den Schnittpunkt S_2 der Geraden mit den Gleichungen

$g_2\colon 3y + 4 = 0$ und $h_2\colon 6x + 8y + 9 = 0$

geht.

Aufgabe 2.5

$$(5,2,1)^T \times (-1,7,0)^T = (-7,-1,37)^T$$

$$(0,3,4)^T \times (6,8,9)^T = (-5,24,-18)^T$$

Die Berechnung der affinen Koordinaten ist überflüssig.

$$(-7,-1,37)^T \times (-5,24,-18)^T = (-870,-311,-173)^T$$

$$s:\ -870x - 311y - 173 = 0$$

Aufgabe 2.6

Weise nach, dass die Geraden $g\colon -4x + 6y + 5 = 0$ und $h\colon 6x - 9y + 1 = 0$ parallel sind, indem du zeigst, dass sie sich in einem Fernpunkt schneiden.

Aufgabe 2.6

$$(-4, 6, 5)^T \times (6, -9, 1)^T = (51, 34, 0)^T$$

Fernpunkt, da die (homogene) z-Koordinate des „Schnittpunkts" null ist.

Aufgabe 2.7

Gegeben sind die Punkte $P(3,4)$ und $Q(5,5)$. Bestimme eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P und den Fernpunkt in Richtung von $\overrightarrow{OQ}$ geht.

Aufgabe 2.7

$$(3,4,1)^T \times (5,5,0)^T = (-5,5,-5)^T$$

$g\colon x - y + 1 = 0$ (Gerade durch P, parallel zu $\overrightarrow{OQ}$)

Aufgabe 2.8

Gegeben sind die Punkte $P(3,4)$ und $Q(5,5)$. Erhält man ein sinnvolles Resultat, wenn man mittels homogener Koordinaten eine Gleichung der Geraden durch die Fernpunkte der Richtungen $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ bestimmt?

Aufgabe 2.8

$$(3,4,0)^T \times (5,5,0)^T = (0,0,-5)^T$$

$$s: \; -5 = 0$$

Das ist kein sinnvolles Ergebnis.

Aufgabe 3.1

Welche Dimension hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 7 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 7 & 2 & 6 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & -1 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 3.1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 7 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 7 & 2 & 6 & 9 \\ 7 & 0 & 2 & -1 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ hat die Dimenision } (4 \times 7).$$

Aufgabe 3.2

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 27 & 13 & 21 \\ 23 & 20 & 29 & 30 & 16 \\ 27 & 25 & 24 & 26 & 18 \\ 11 & 27 & 10 & 12 & 22 \\ 30 & 10 & 29 & 25 & 20 \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} = ?$$

Aufgabe 3.2

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 27 & 13 & 21 \\ 23 & 20 & 29 & 30 & 16 \\ 27 & 25 & 24 & 26 & 18 \\ 11 & 27 & 10 & 12 & 22 \\ 30 & 10 & 29 & 25 & 20 \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} = 29$$

Aufgabe 3.3

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 9 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 9 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \text{ ist nicht definiert.}$$

Aufgabe 3.5

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.5

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 25 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.6

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Aufgabe 3.6

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.7

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.7

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -29 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.9

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.9

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ -13 & -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.12

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.12

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.13

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.13

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.14

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.14

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ ist nicht definiert.}$$

Aufgabe 3.15

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.15

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.16

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.16

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 12 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$