Teil I

Elemente der Zweitafelprojektion

1 Einleitung

Darstellende Geometrie: Eindeutige Darstellung der Geometrie des Raumes auf einer Zeichenebene ohne primäre Anschaulichkeit.

Eine DG-Zeichnung muss exakt (Längen, Winkel) und übersichtlich (Farben, Beschriftung Prioritäten) sein

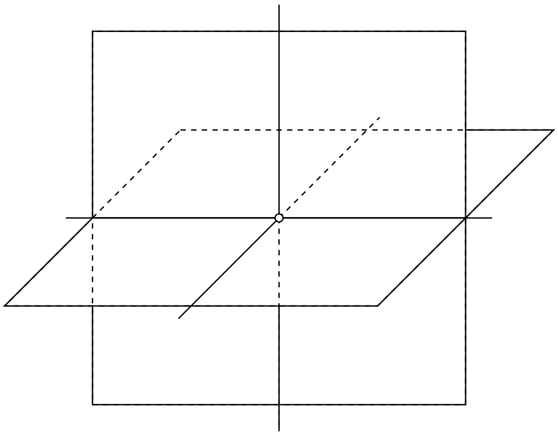
Material: 2 gespitzte Bleistifte
- 8 Farben (dünne Filzstifte oder gespitzte Farbstifte)
- Spitzer, Gummi
- grosses Geodreick, Massstab
- gespitzter Zirkel
- genügend A4-Blätter (4 mm)

Die Zweitafelprojektion arbeitet mit zwei Projektionsebenen:

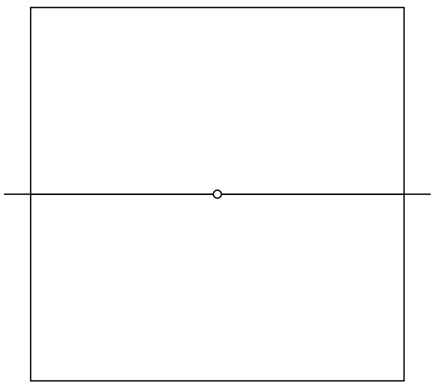
- *Grundrissebene* π_1 (xy-Ebene)
- *Aufrissebene* π_2 (yz-Ebene)

Diese Ebenen schneiden sich in der *Rissachse* $x_{1,2}$ (y-Achse)

Räumliches Bild:



DG-Bild:

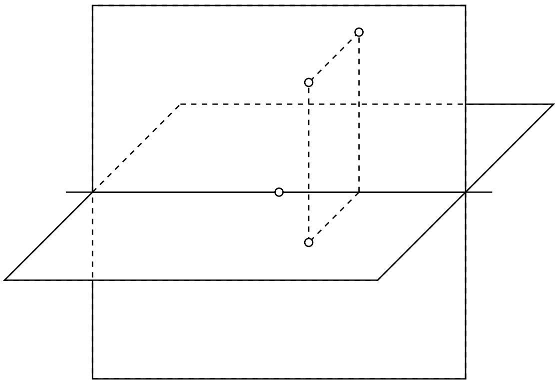


Für die Darstellung auf dem Zeichenblatt wird π_1 so um die Rissachse gedreht, bis $-\pi_1$ mit $+\pi_2$ und $+\pi_1$ mit $-\pi_2$ zusammenfallen.

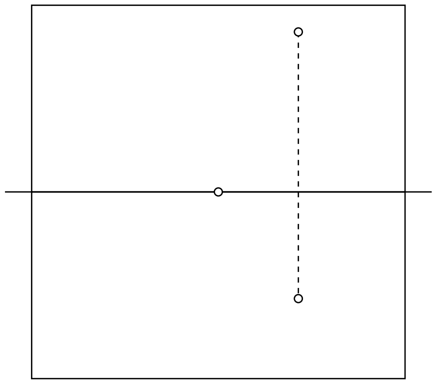
2 Darstellung von Punkten

2.1 Allgemeine Lagen eines Punktes

Räumliches Bild:



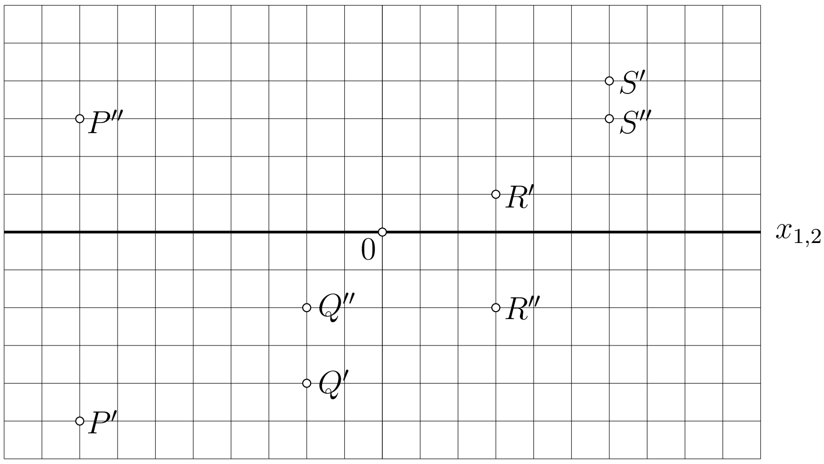
DG-Bild:



Die Projektionen des Punktes P auf π_1 und π_2 heissen P' und P''.

Grund und Aufriss eines Punktes liegen (in DG-Darstellung) auf einer Normalen zur Rissachse, genannt *Ordner*.

Beispiel 1: Lies die Koordinaten der Punkte P, Q, R und S ab. (Einheit 1 H)



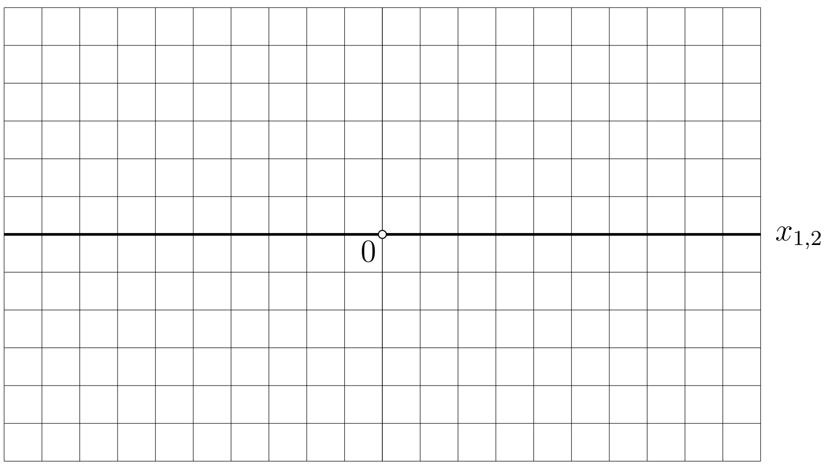
Beispiel 2: Stelle folgende Punkte in der Zweitafelprojektion dar. (Einheit 1 H)

$A(4|-9|1)$

$B(-5|-3|-4)$

$C(-2|4|3)$

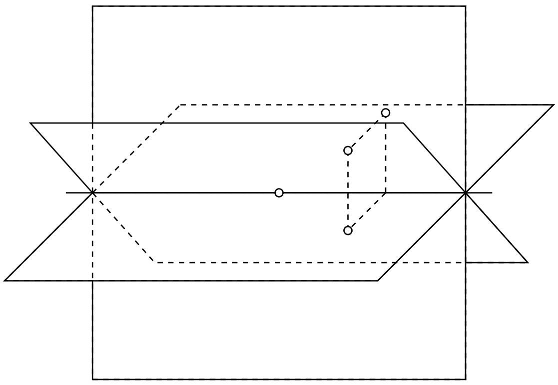
$D(4|4|-1)$



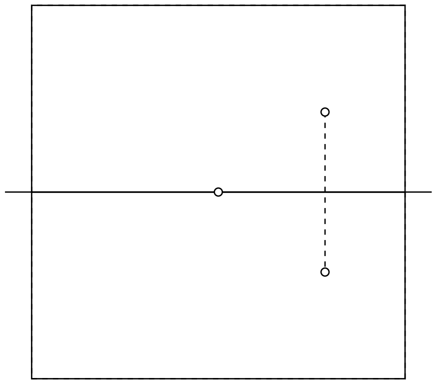
2.2 Spezielle Lagen eines Punktes

Punkt in der *Symmetrieebene*

Räumliches Bild:

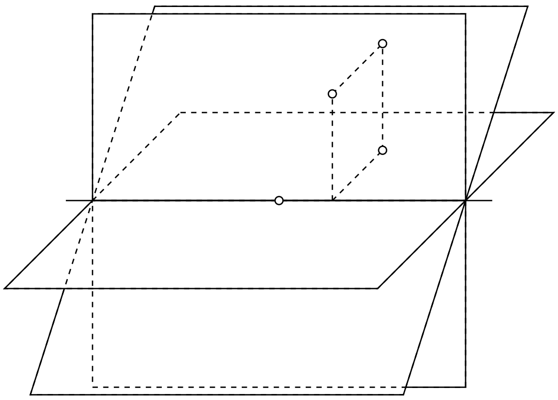


DG-Bild:

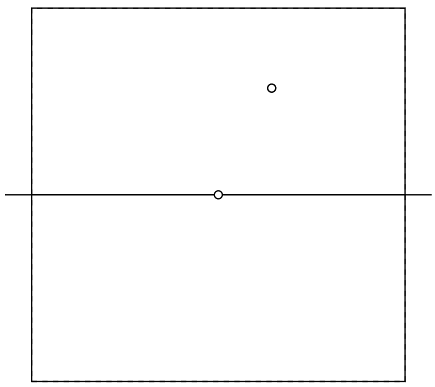


Punkt in der *Koinzidenzebene*

Räumliches Bild:

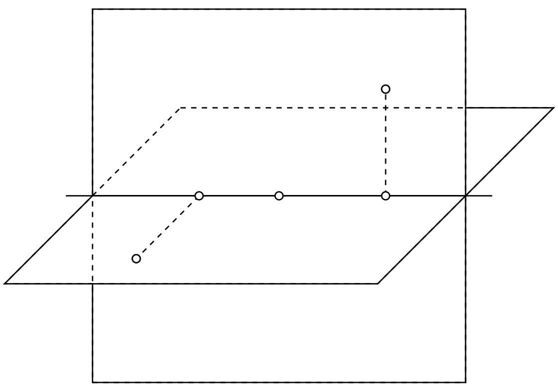


DG-Bild:

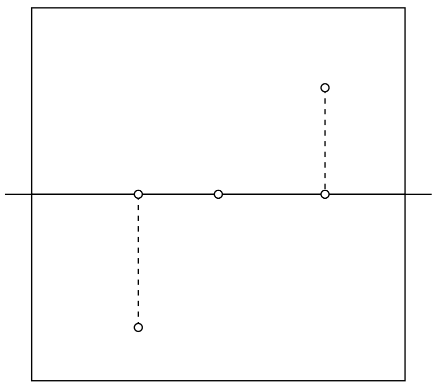


Punkt auf π_1 bzw. π_2

Räumliches Bild:



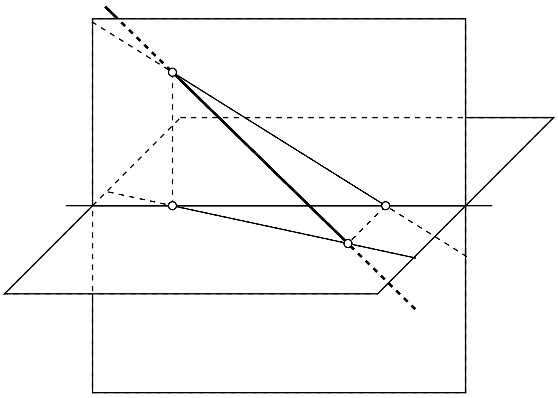
DG-Bild:

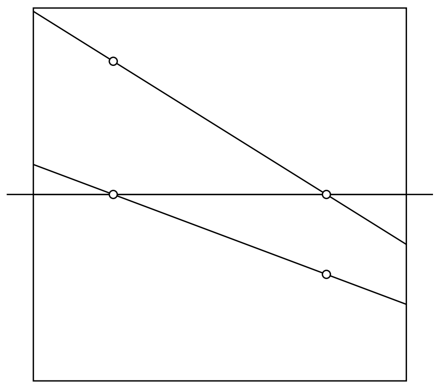


3 Darstellung von Geraden

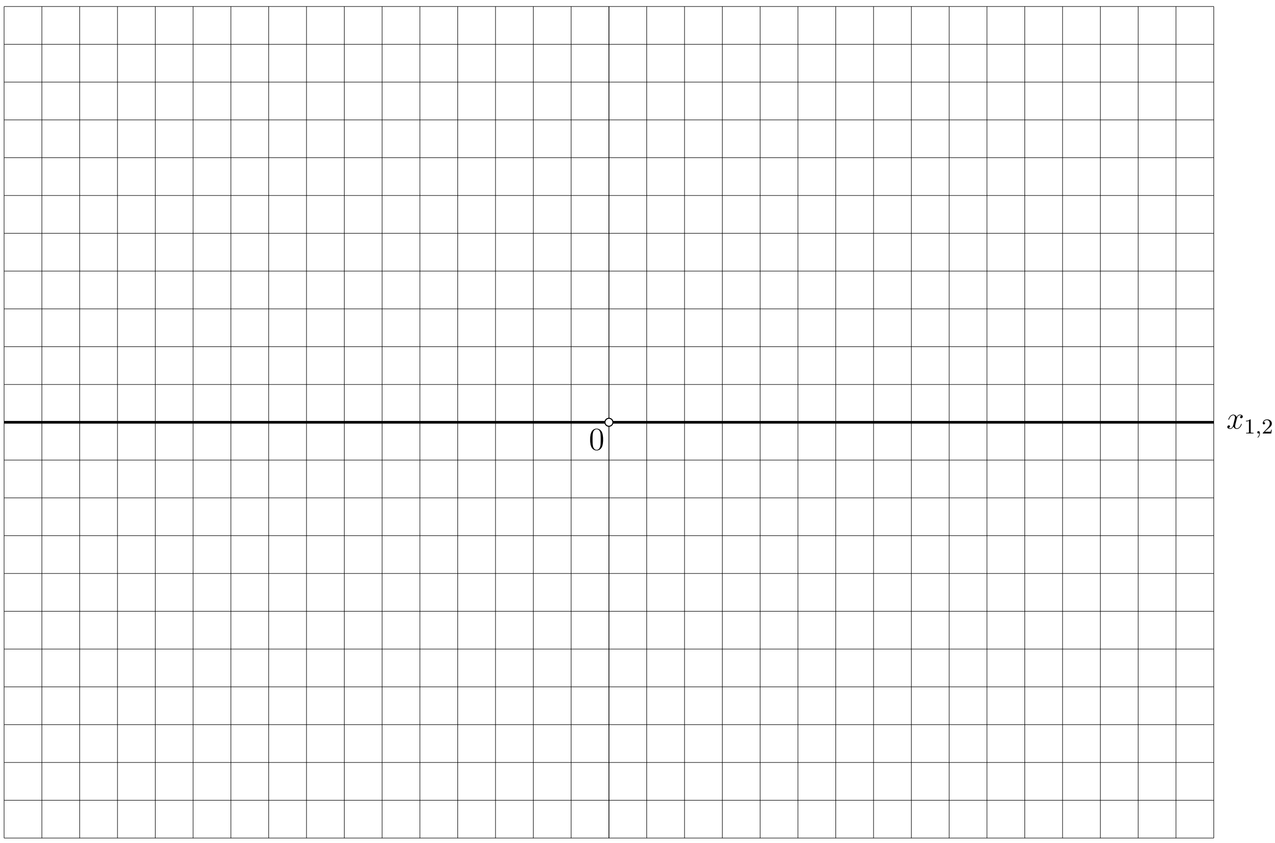
Eine Gerade ist durch ihre Risse bestimmt, insbesondere durch die Risse zweier auf der Geraden liegender Punkte.

Räumliches Bild: DG-Bild:





Beispiel 1: Stelle die Gerade $g = (AB)$ in der Zweitafelprojektion dar. $A(10|-14|4)$, $B(-2|4|10)$ (Einheit 1 H)



Für Punkte auf der Geraden gilt: $P \in g \;\Leftrightarrow\; P' \in g'$ und $P'' \in g''$

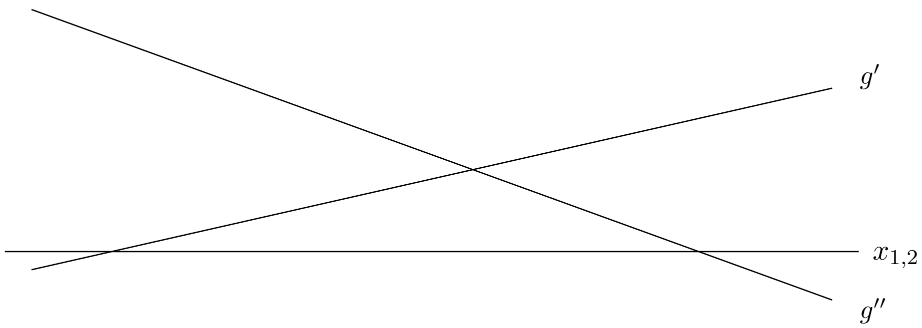
Beispiel 2: Überprüfe, ob $C(6|-8|6)$ und $D(4|-5|6)$ auf g liegen.

Beispiel 3: Konstruiere auf der Geraden g den Punkt E mit der z-Koordinate 8. Welche Koordinaten hat E?

Definition: Die Spurpunkte S_1, S_2 einer Geraden sind die Schnittpunkte der Geraden mit den Projektionsebenen π_1, π_2.

3.1 Die erste Standardaufgabe (Spurpunkte einer Geraden)

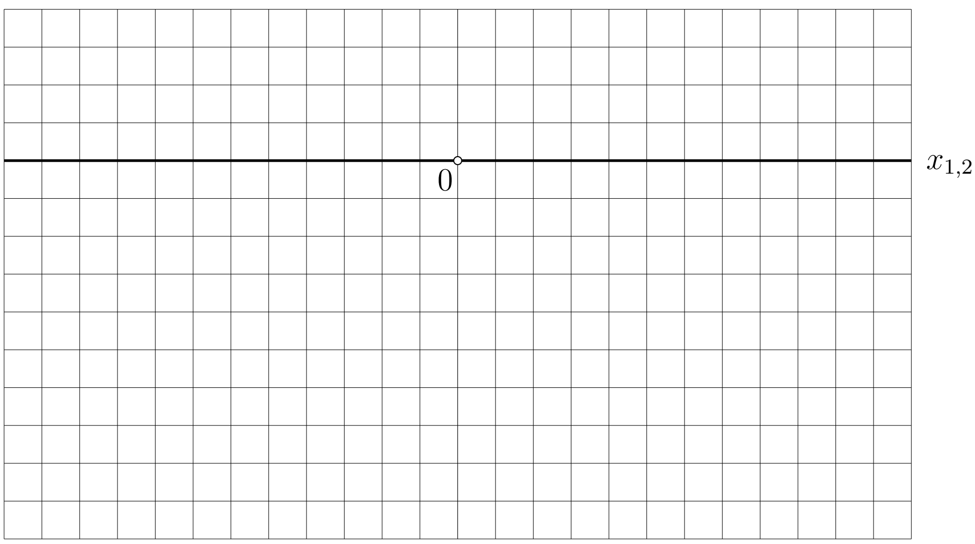
1. *Gegeben:* Gerade g
2. *Gesucht:* Spurpunkte S_1, S_2
3. *Lösungsidee:* Die Grundrissebene sieht man im Aufriss nur als Gerade (Rissachse)
4. *Konstruktion:*



5. *Konstruktionsbericht:*

   (a)
   (b)
   (c)
   (d)

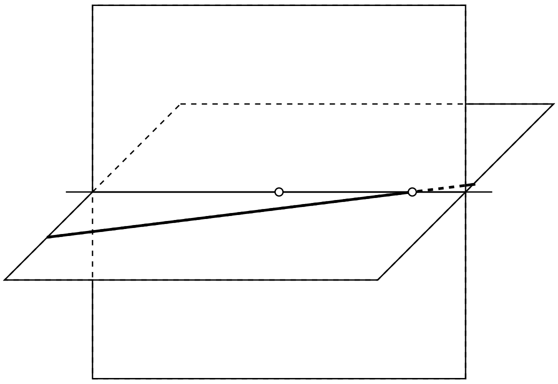
Beispiel 4: Stelle die Gerade $g = (AB)$ in der Zweitalfelprojektion dar. Konstruiere die Spurpunkte S_1 und S_2 und lies deren Koordinaten ab. $A(-1|6|-8)$, $B(4|-4|2)$



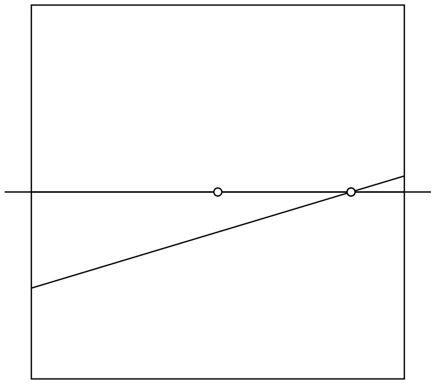
3.2 Geraden in spezieller Lage

3.2.1 Geraden in den Koordinatenebenen

Räumliches Bild:



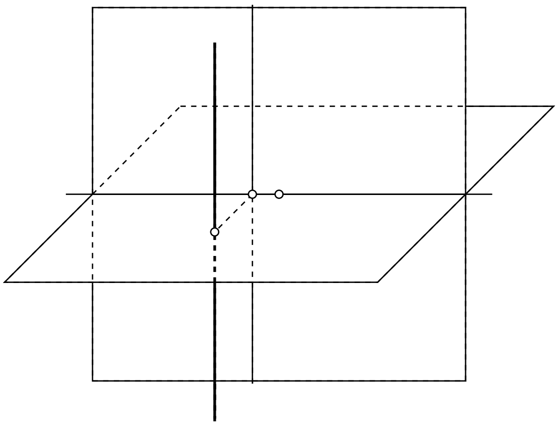
DG-Bild:



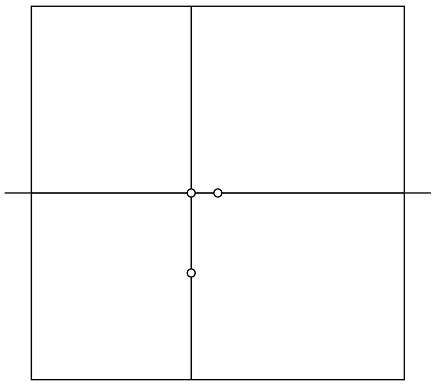
3.2.2 Projizierende Geraden

Definition: Eine Normale zu π_1 heisst erstprojizierende Gerade.
Eine Normale zu π_2 heisst zweitprojizierende Gerade.

Räumliches Bild:



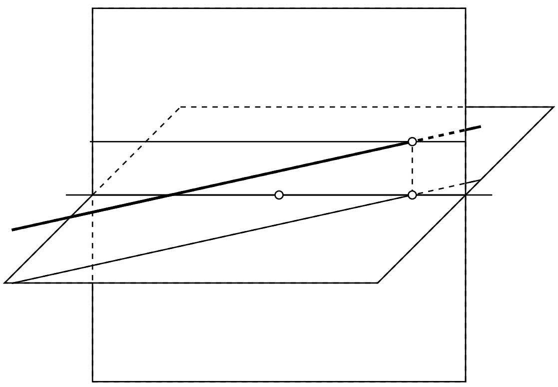
DG-Bild:



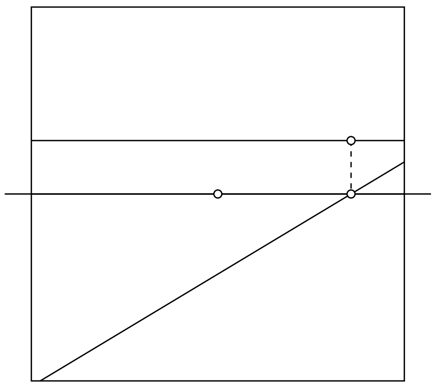
3.2.3 Hauptgeraden

Definition: Eine Gerade parallel zu π_1 heisst erste Hauptgerade.
Eine Gerade parallel zu π_2 heisst zweite Hauptgerade.

Räumliches Bild:



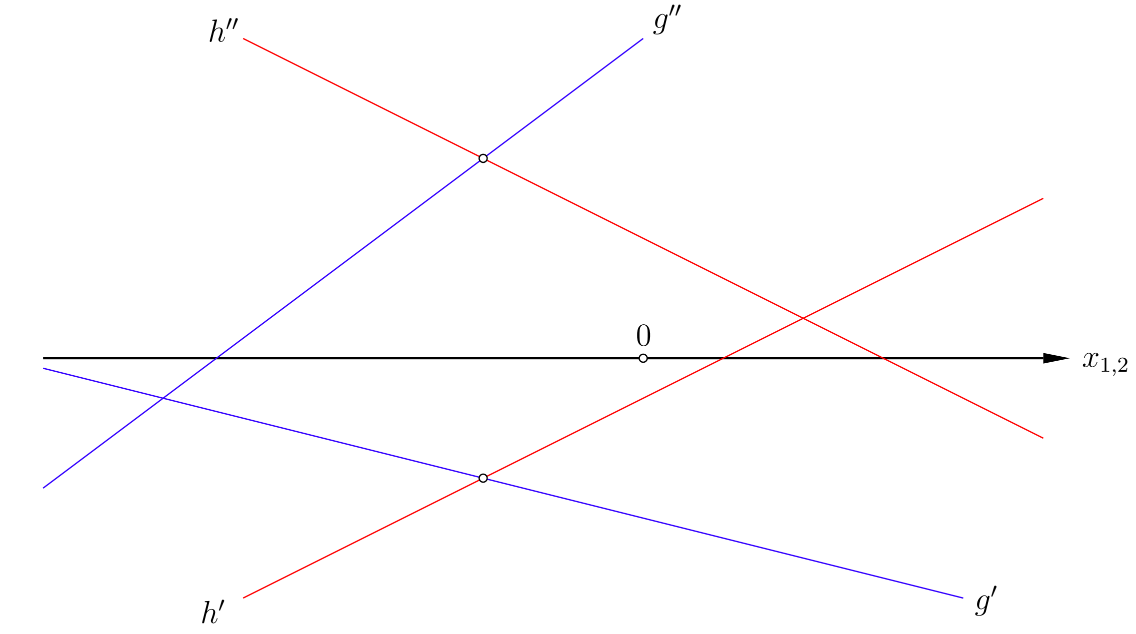
DG-Bild:



3.3 Gegenseitige Lage zweier Geraden

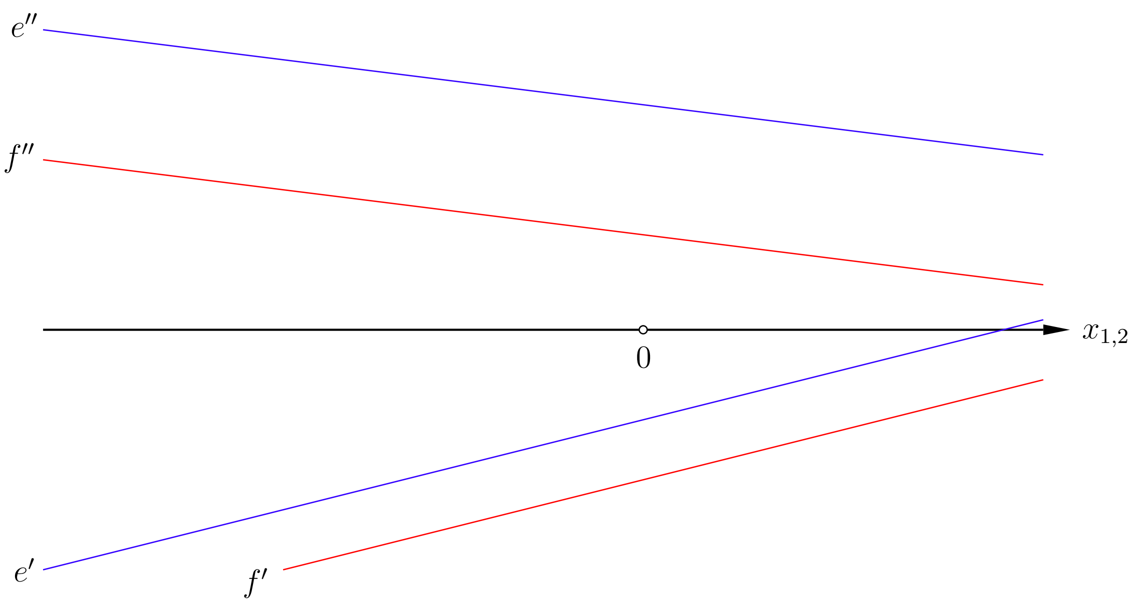
3.3.1 Sich schneidende Geraden

Zwei Geraden schneiden sich genau dann, wenn der Schnittpunkt ihrer Grundrisse und der Schnittpunkt ihrer Aufrisse auf einem Ordner liegen.



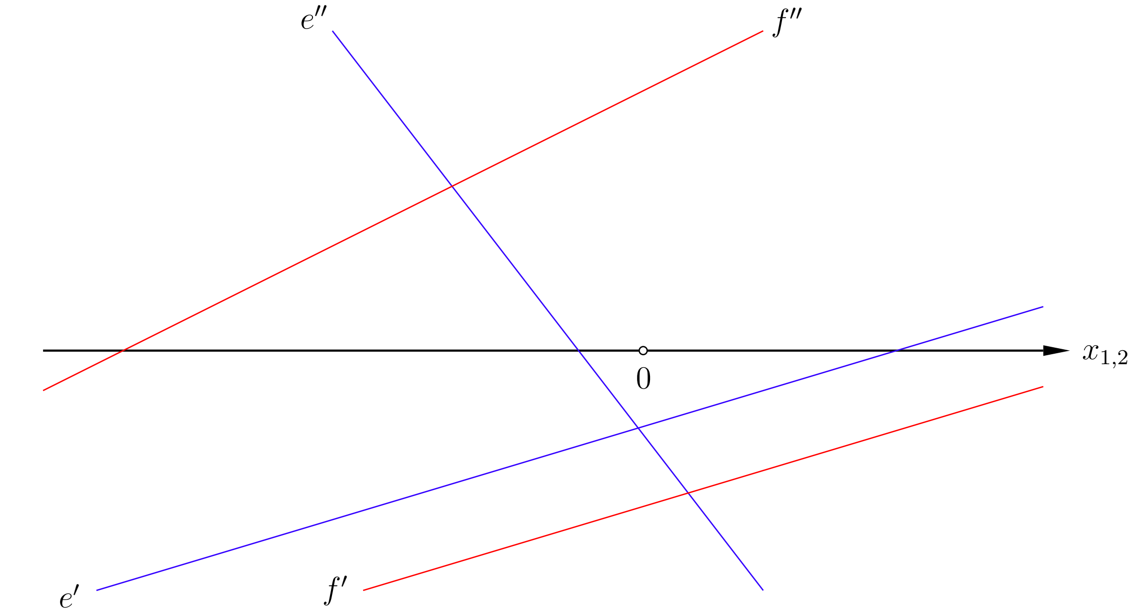
3.3.2 Parallele Geraden

Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sowohl ihre Grund als auch ihre Aufrisse je parallel sind.

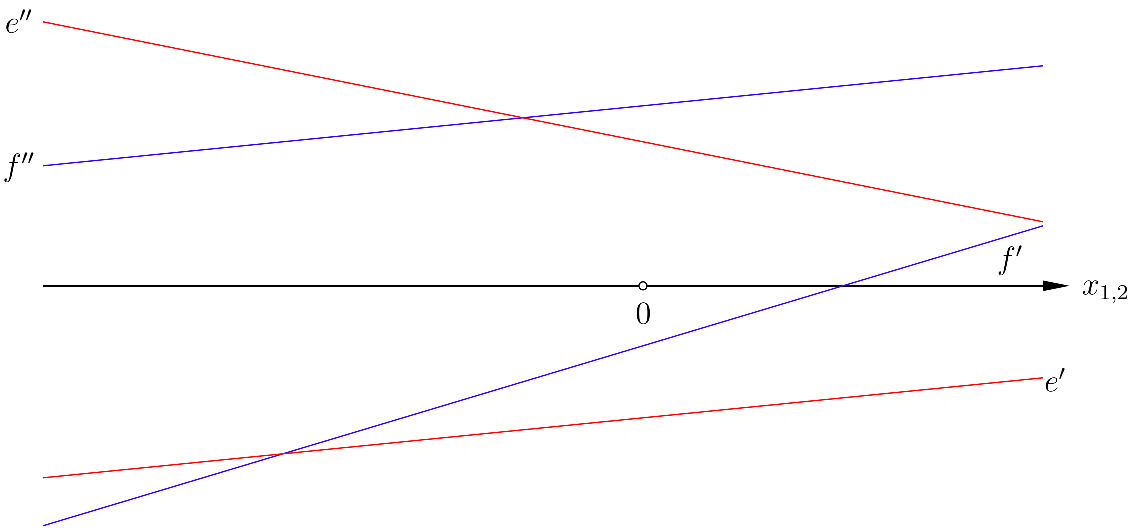


3.3.3 Windschiefe Geraden

Definition: Zwei Geraden heissen windschief, wenn sie sich weder schneiden noch parallel sind.



Windschiefe Geraden mit parallelen Grundrissen und sich schneidenden Aufrissen.



Windschiefe Geraden mit sich schneidenden Rissen.

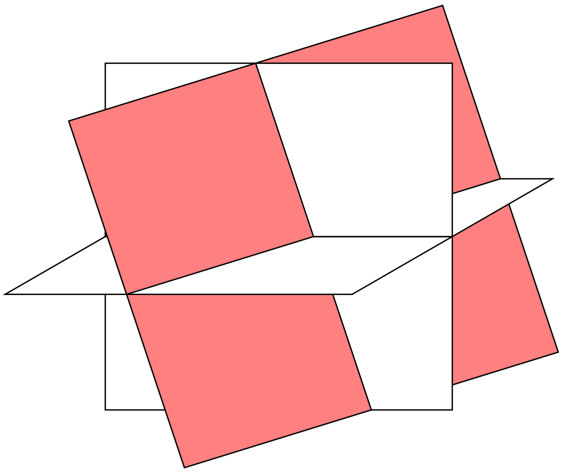
4 Die Darstellung der Ebene

Eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ wird definiert durch

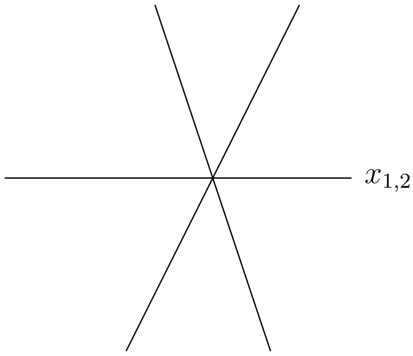
- zwei sich schneidende Geraden
- zwei parallele Geraden
- drei Punkte
- einen Punkt und eine Gerade

Besonders anschaulich ist die Darstellung der Ebene im DG-Bild durch zwei Spuren.

Räumliches Bild:



DG-Bild:



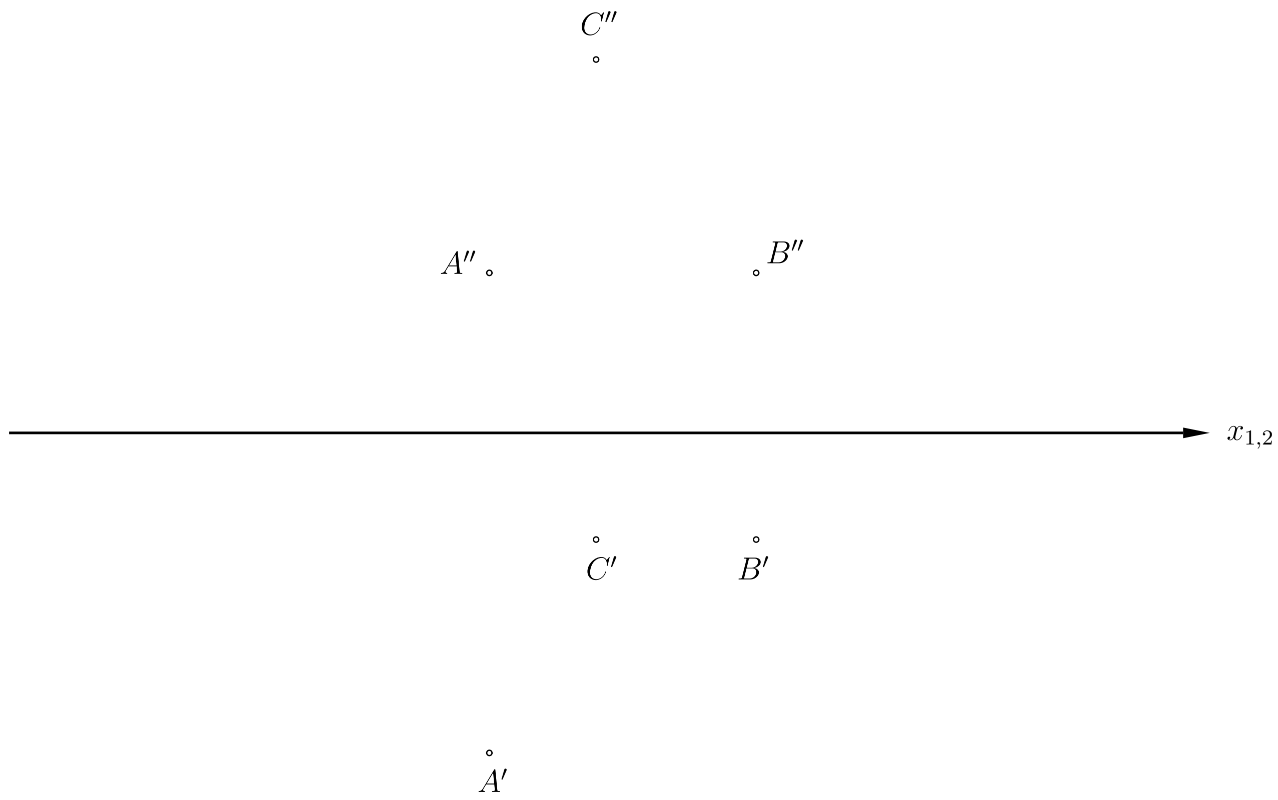
Zur Vereinfachung lässt man die Projektionsbezeichnungen e_1' und e_2'' weg und schreibt e_1 für den Grundriss der ersten Spur und e_2 für den Aufriss der zweiten Spur.

Beachte: e_1 und e_2 sind zwei verschiedene Geraden!

- e_1 ist der Grundriss; der zu e_1 gehörende Aufriss ist die Rissachse.
- e_2 ist der Aufriss; der zu e_2 gehörende Grundriss ist die Rissachse.
- e_1 und e_2 schneiden sich auf der Rissachse.

4.1 Die zweite Standardaufgabe

1. *Gegeben:* Ebene ε durch A, B und C
2. *Gesucht:* Spuren e_1, e_2
3. *Lösungsidee:* Spurpunkte von Geraden in ε liegen auf den Spuren
4. *Konstruktion:*



5. *Konstruktionsbericht:*

   (a)

   (b)

   (c)

   (d)

   (e)

   (f)

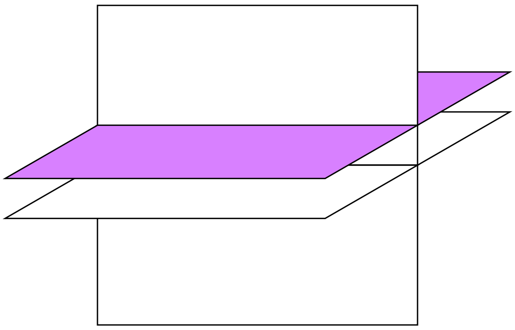
4.2 Ebenen in spezieller Lage

4.2.1 Hauptebenen

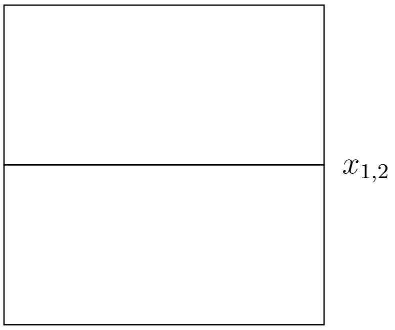
Definition: Verläuft eine Ebene parallel zu einer der Projektionsebenen π_1, π_2 oder π_3, so nennt man sie eine erste, eine zweite oder eine dritte Hauptebene (HE).

Erste Hauptebene α

Räumliches Bild:

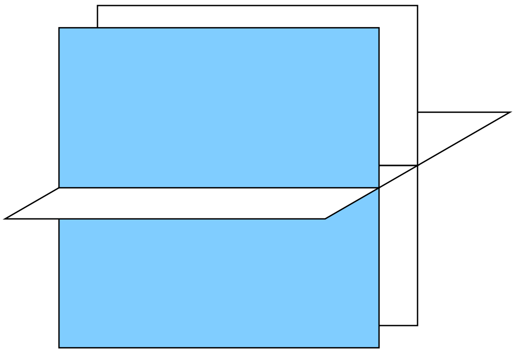


DG-Bild:

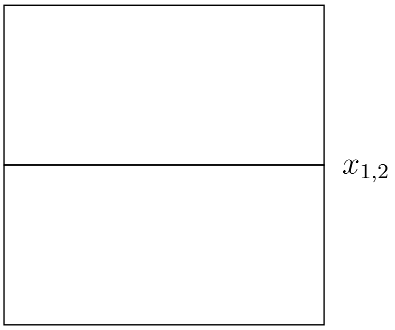


Zweite Hauptebene β

Räumliches Bild:

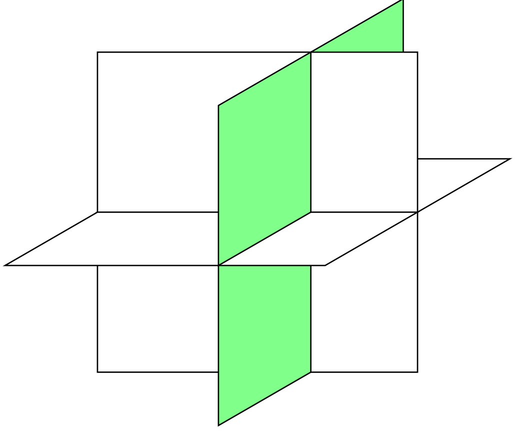


DG-Bild:

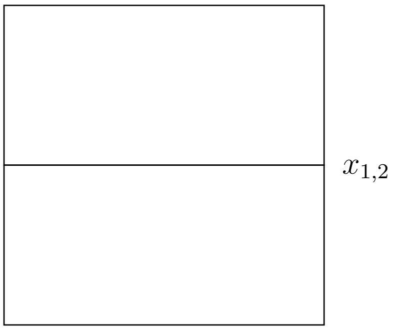


Dritte Hauptebene γ

Räumliches Bild:



DG-Bild:

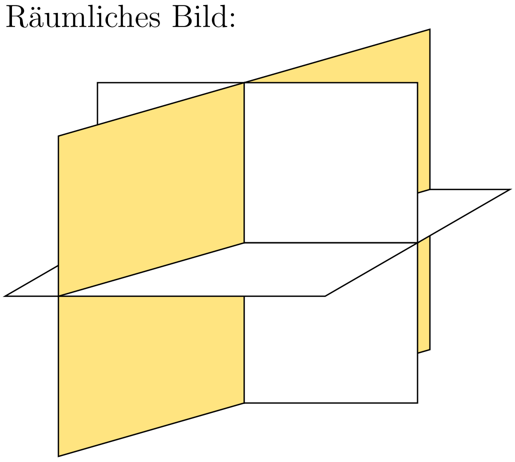


4.2.2 Projizierende Ebenen

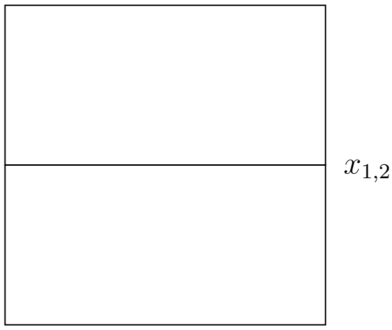
Definition: Steht eine Ebene normal zu einer der Projektionsebenen π_1, π_2 oder π_3, so nennt man sie eine erst-, eine zweit- oder eine drittprojizierende Ebene (PE).

Erstprojizierende Ebene δ

Räumliches Bild:

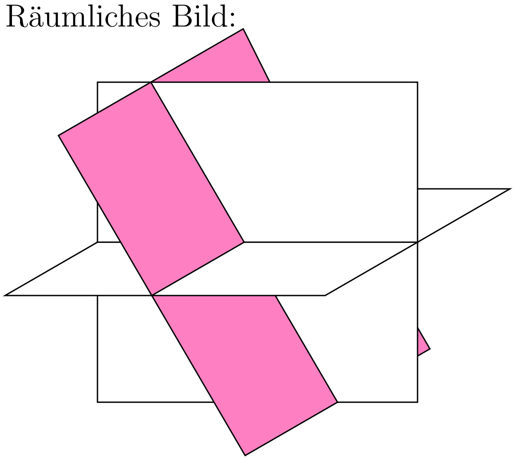


DG-Bild:

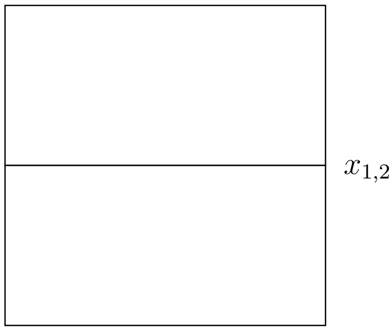


Zweitprojizierende Ebene ε

Räumliches Bild:

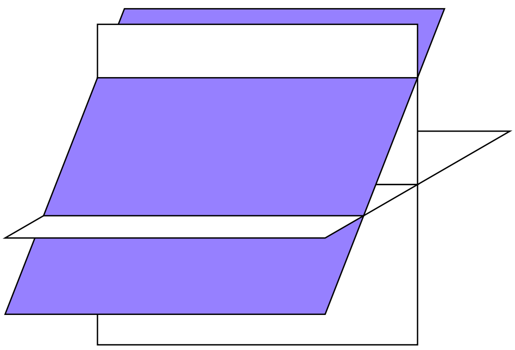


DG-Bild:

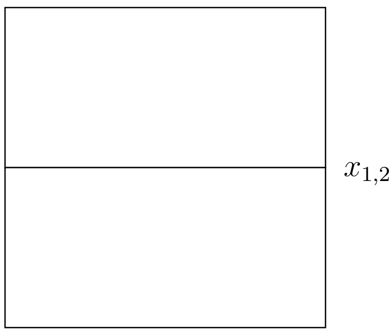


Drittprojizierende Ebene φ

Räumliches Bild:



DG-Bild:



Teil II

Lageaufgaben

5 Punkt – Gerade – Ebene

5.1 Die Gerade in der Ebene

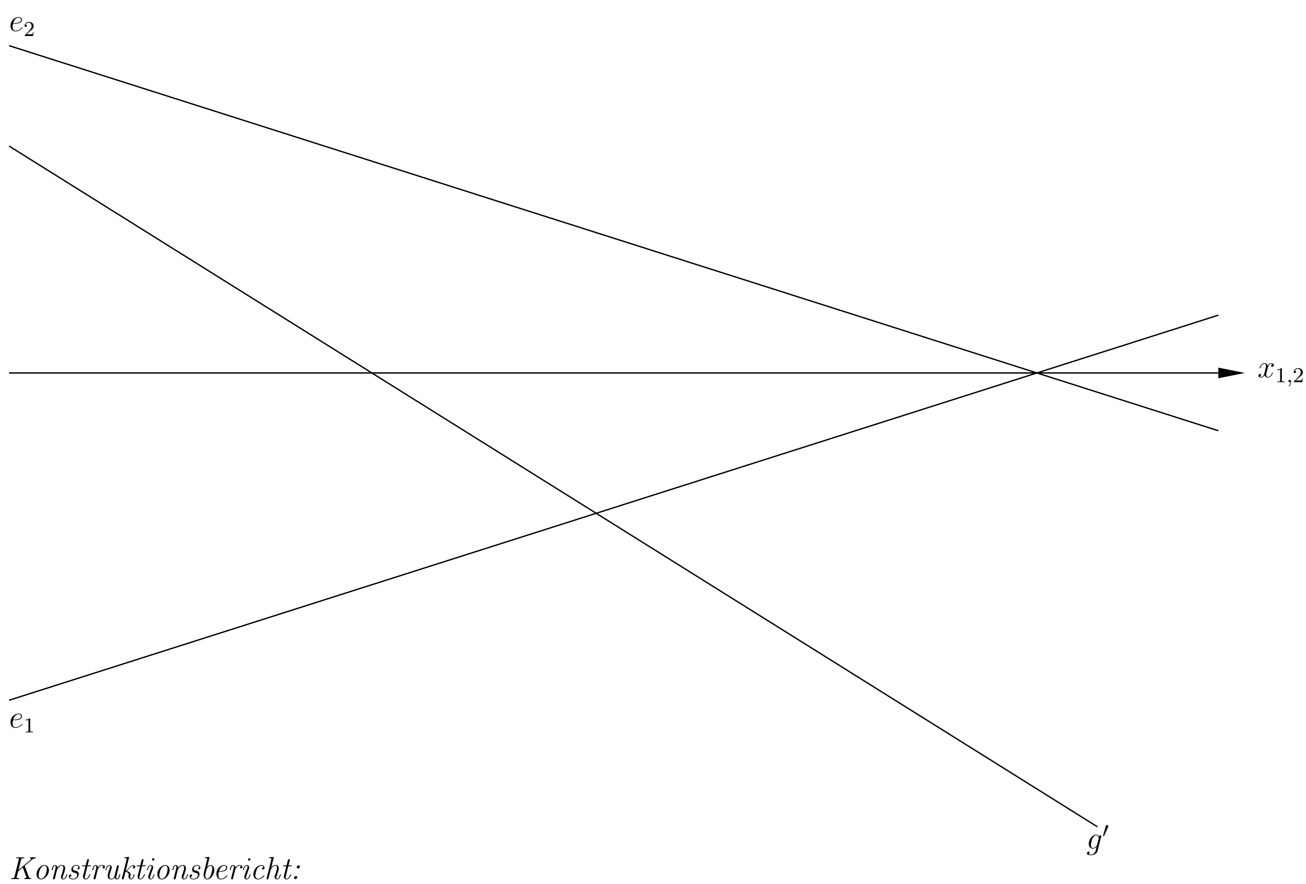
5.1.1 Die 3. Standardaufgabe

Gegeben: Ebene ε durch e_1, e_2; Grundriss g' einer Geraden g

Gesucht: Aufriss g'' von g, so dass $g \subset \varepsilon$

Lösungsidee: Wegen $g \subset \varepsilon$, müssen $S_1 \in e_1$ und $S_2 \in e_2$ sein

Konstruktion:



Konstruktionsbericht:

5.1.2 Spezialfälle zur 3. Standardaufgabe

Beispiel 1

Gegeben: Drittprojizierende Ebene ε und $g' \parallel x_{1,2}$

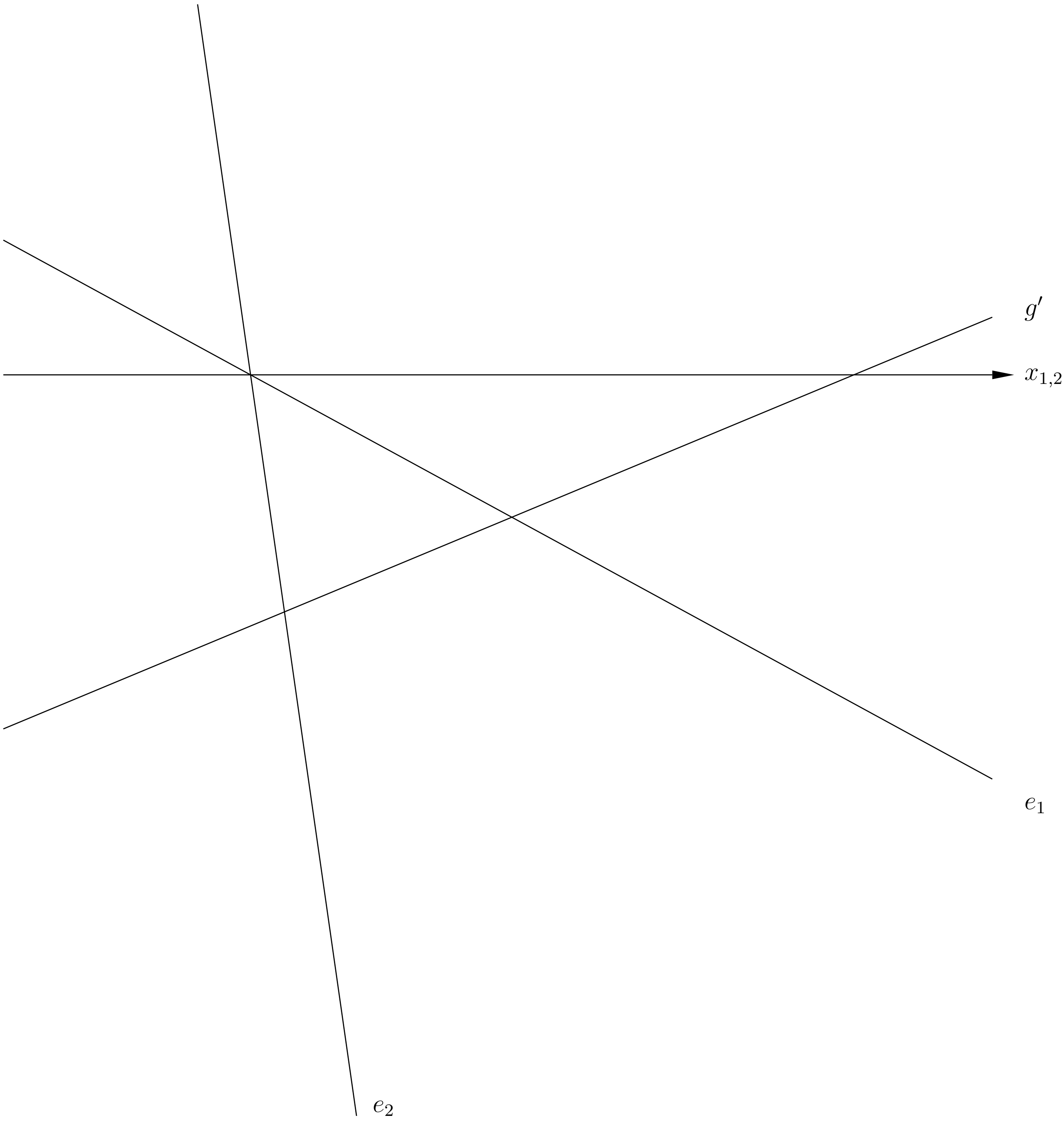
Gesucht: Aufriss g'' von g so dass $g \subset \varepsilon$

Konstruktionsbericht:

Beispiel 2

Gegeben: Ebene ε durch e_1, e_2 und Grundriss g' einer Geraden g

Gesucht: Aufriss g'' von g so dass $g \subset \varepsilon$



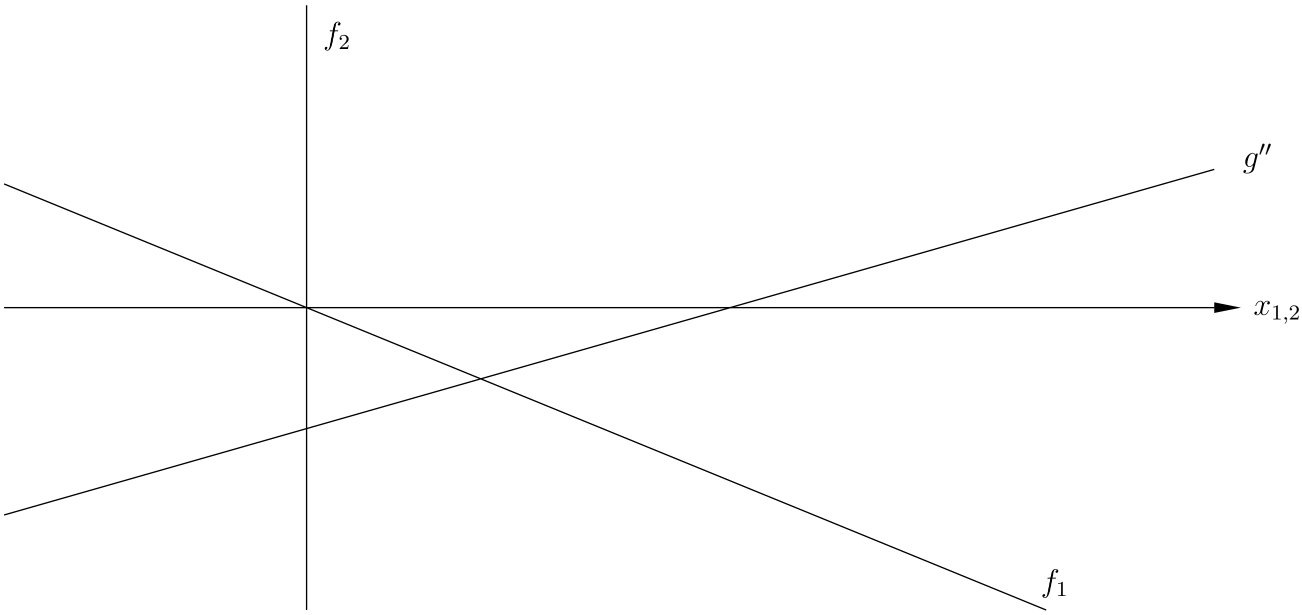
Problem:

Lösungsidee:

Beispiel 3

Gegeben: Erstprojizierende Ebene $\varphi = (f_1, f_2)$ und Aufriss g'' einer Geraden g

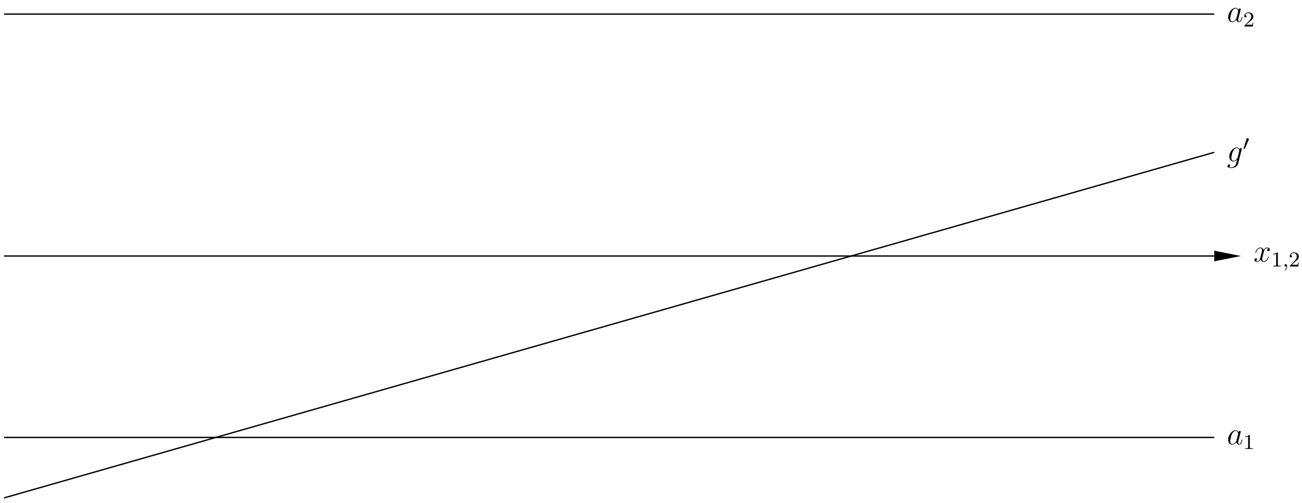
Gesucht: Grundriss g' von g so dass $g \subset \varphi$



Beispiel 4

Gegeben: Drittprojizierende Ebene $\alpha = (a_1, a_2)$ und Grundriss g' einer Geraden g

Gesucht: Aufriss g'' von g so dass $g \subset \alpha$



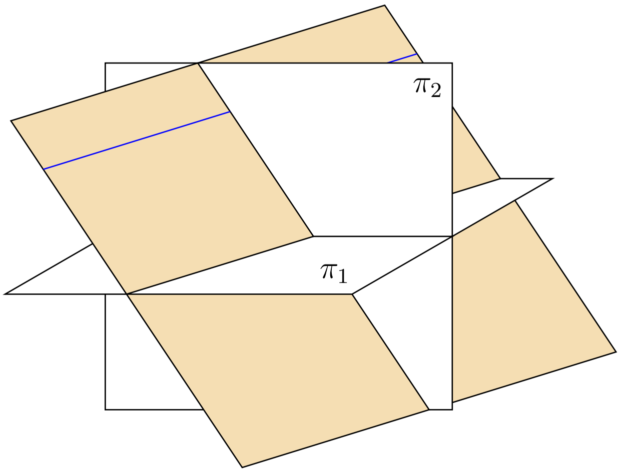
5.2 Spezielle Lagen von Geraden in einer Ebene

5.2.1 Die Spurparallele

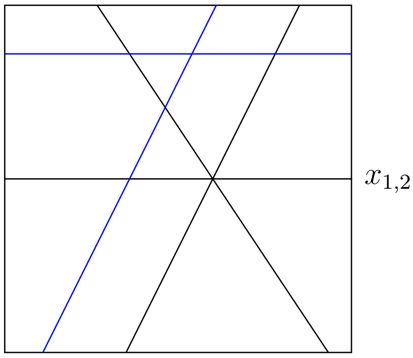
Definition: Eine Gerade, welche in einer Ebene liegt und parallel zu einer Spur derselben verläuft, nennt man *Spurparallele*; sie ist zugleich auch Hauptgerade.

Darstellung einer ersten Spurparallelen: Bei einer ersten Spurparallelen ist der Aufriss parallel zur Rissachse und der Grundriss parallel zur ersten Spur der Ebene.

Räumliches Bild:

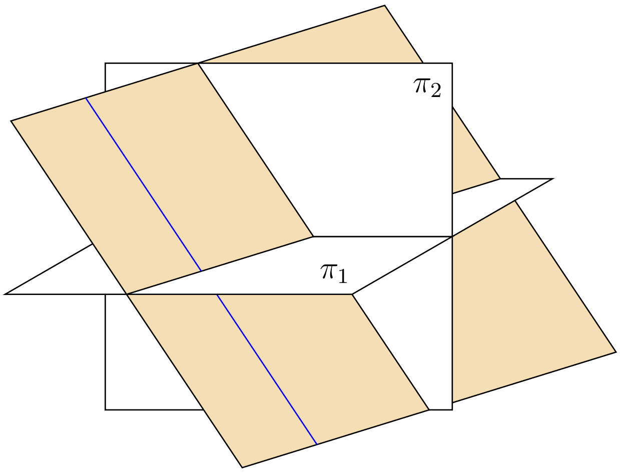


DG-Bild:

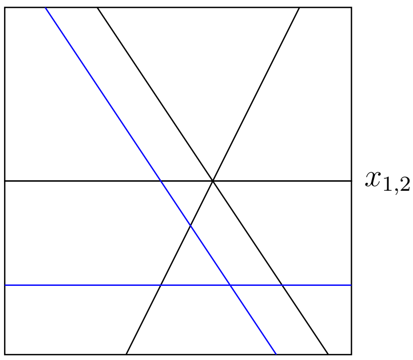


Darstellung einer zweiten Spurparallelen: Bei einer zweiten Spurparallelen ist der Aufriss parallel zur zweiten Spur der Ebene und der Grundriss parallel zur Rissachse.

Räumliches Bild:



DG-Bild:



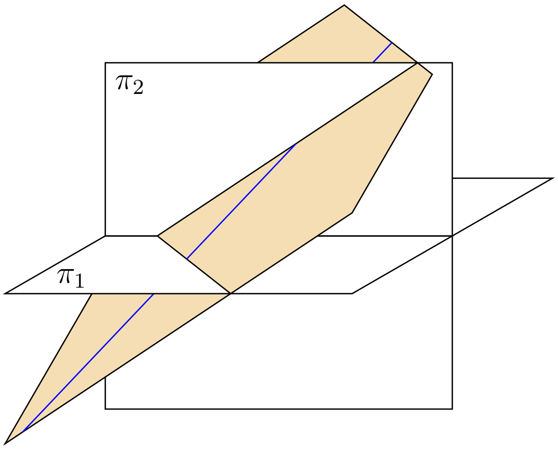
Eine Spurparallele nennt man auch *Niveaugerade* oder *Höhengerade*. Dieser Name stammt daher, weil eine erste Spurparallele überall dieselbe Höhe hat.

5.2.2 Die Spurnormale

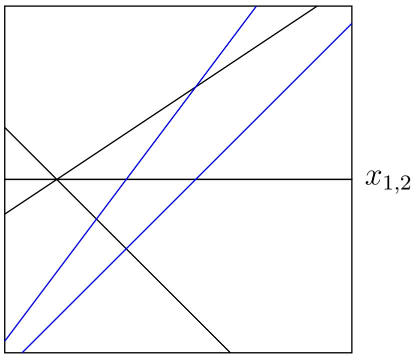
Definition: Eine Gerade, welche in einer Ebene liegt und senkrecht zu einer Spur derselben ist, nennt man eine *Spurnormale* oder *Fallgerade*.

Eine erste Spurnormale gibt die Richtung der grössten Steigung bzw. des grössten Gefälles der Ebene an. Daher auch der Name Fallgerade.

Räumliches Bild:

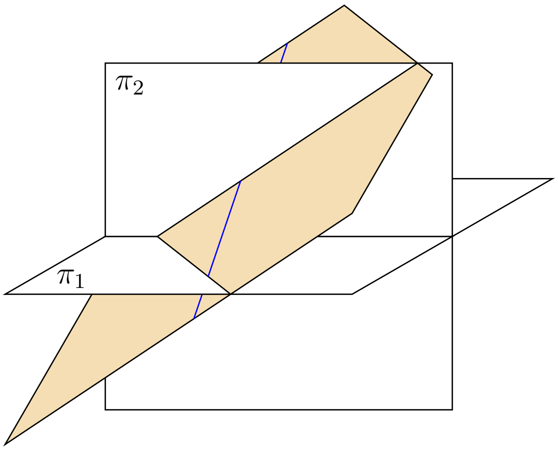


DG-Bild:

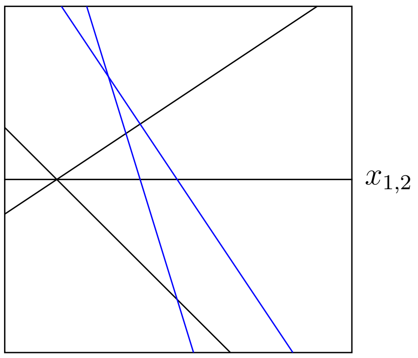


Der Grundriss einer Spurnormalen bezüglich e_1 steht senkrecht auf e_1.

Räumliches Bild:



DG-Bild:

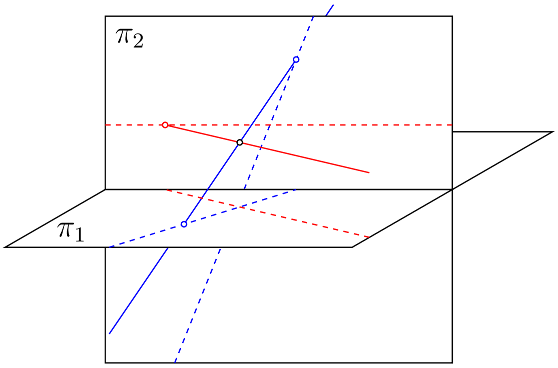


Der Aufriss einer Spurnormalen bezüglich e_2 steht senkrecht auf e_2.

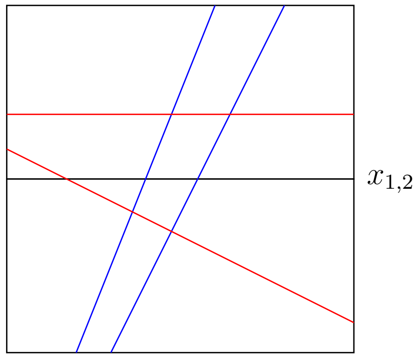
5.2.3 Erhaltungssätze für rechte Winkel

Liegt ein Schenkel eines rechten Winkels auf einer ersten Hauptgeraden, so bleibt der rechte Winkel im Grundriss erhalten.

Räumliches Bild:

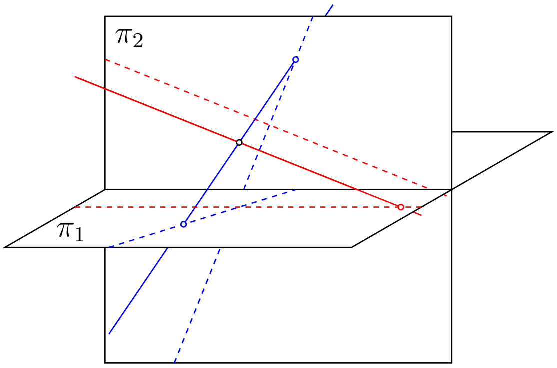


DG-Bild:

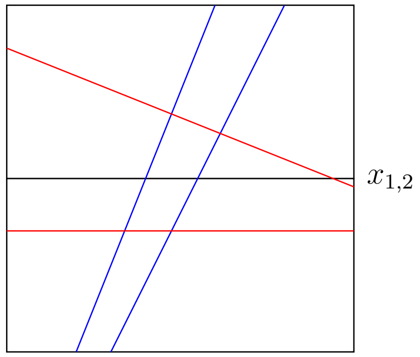


Liegt ein Schenkel eines rechten Winkels auf einer zweiten Hauptgeraden, so bleibt der rechte Winkel im Aufriss erhalten.

Räumliches Bild:



DG-Bild:



5.3 Der Punkt in der Ebene

5.3.1 Die 4. Standardaufgabe

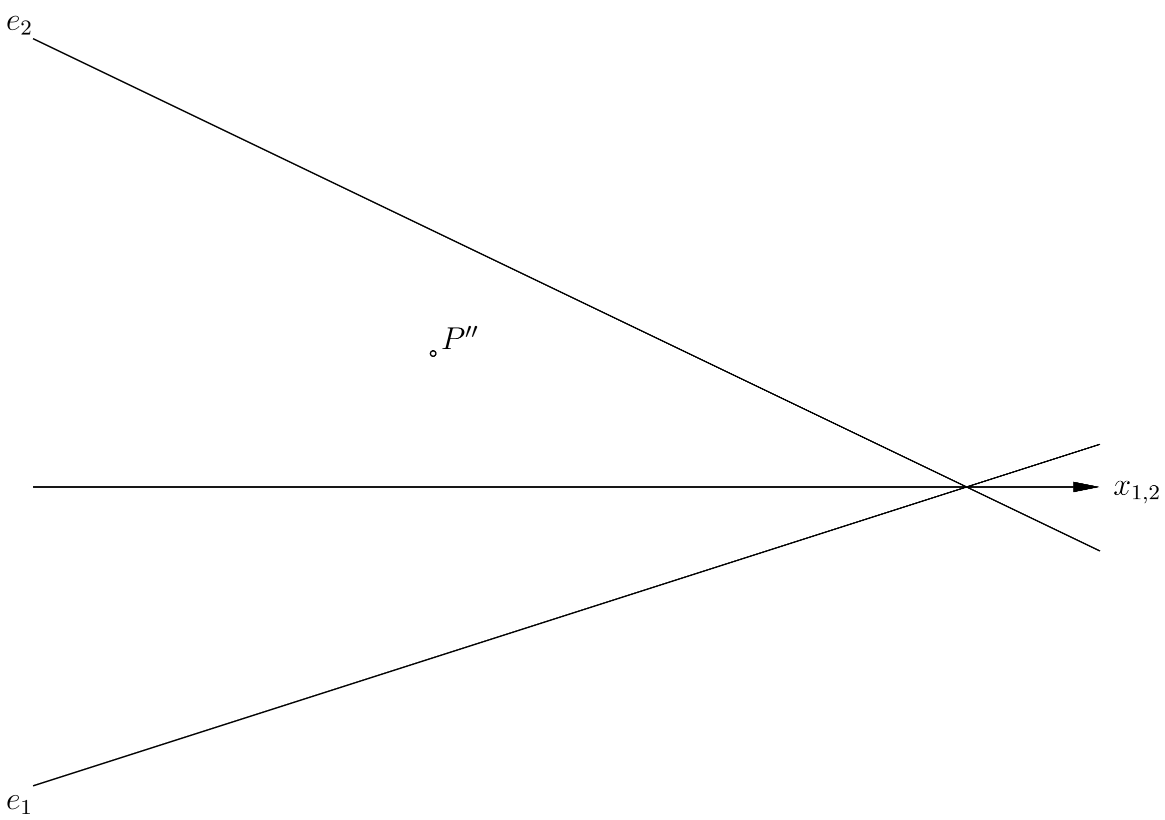
Lösung mittels beliebiger Hilfsgerade

Gegeben: Ebene ε durch e_1, e_2; Aufriss P'' von P

Gesucht: Grundriss P' von P, so dass $P \in \varepsilon$

Lösungsidee: Hilfsgerade m durch $P \to$ 3. Standardaufgabe

Konstruktion:



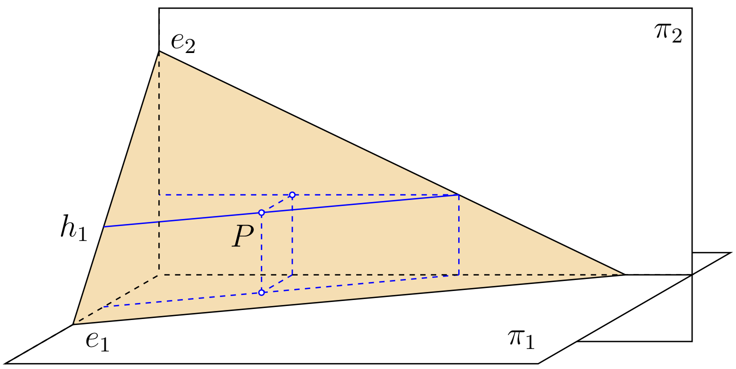
Konstruktionsbericht:

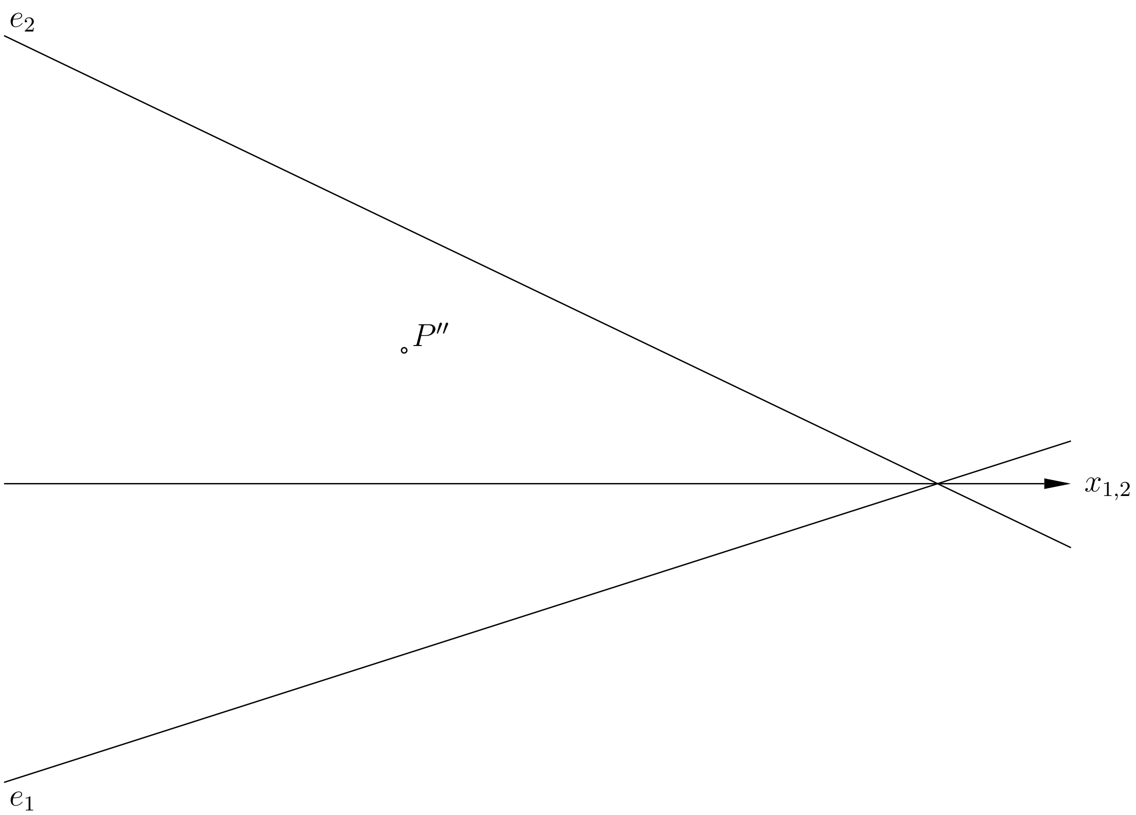
Lösung der 4. Standardaufgabe mittels erster Spurparallelen (1. HG)

Gegeben: Ebene ε durch e_1, e_2; Aufriss P'' von P

Gesucht: Grundriss P' von P, so dass $P \in \varepsilon$

Lösungsidee: Man verwendet eine Hauptgerade in ε als Hilfsgerade



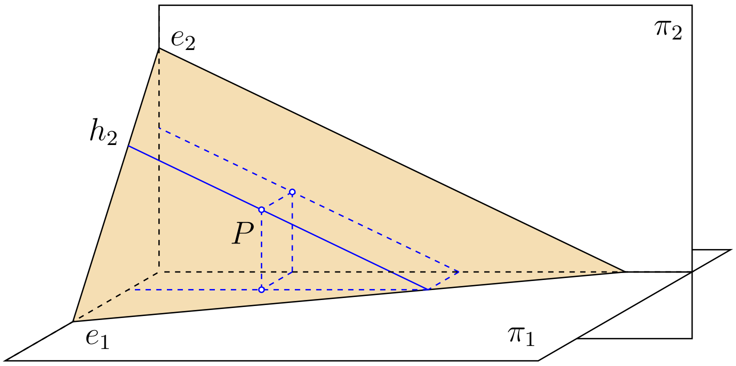


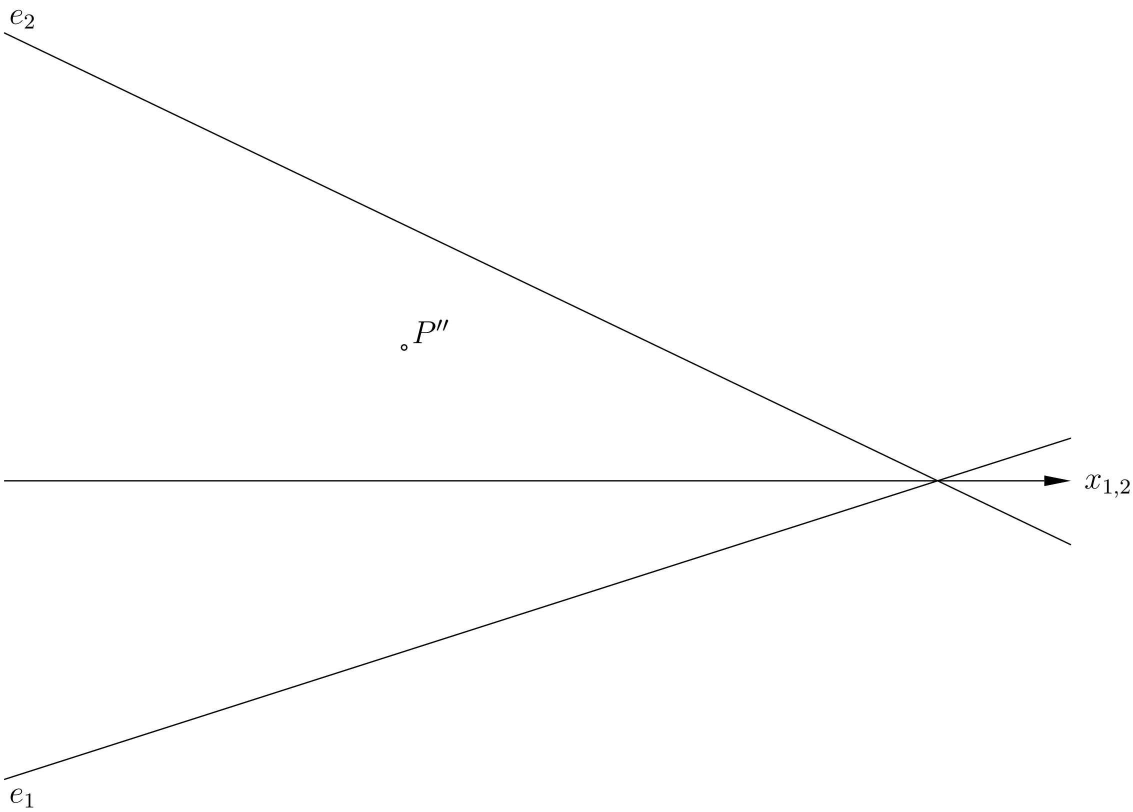
Konstruktionsbericht:

Lösung der 4. Standardaufgabe mittels zweiter Spurparallelen (2. HG)

Gegeben: Ebene ε durch e_1, e_2; Aufriss P'' von P

Gesucht: Grundriss P' von P, so dass $P \in \varepsilon$



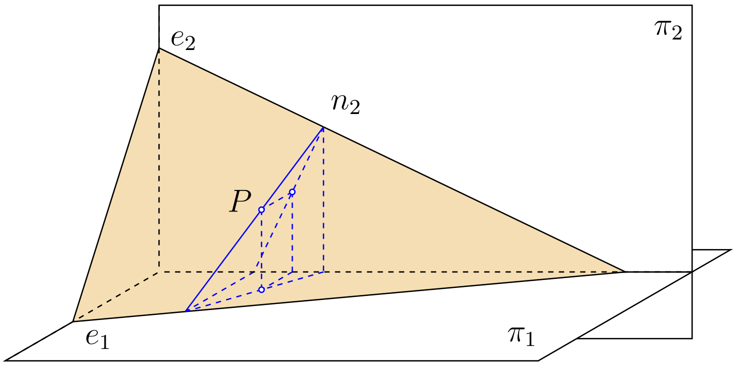


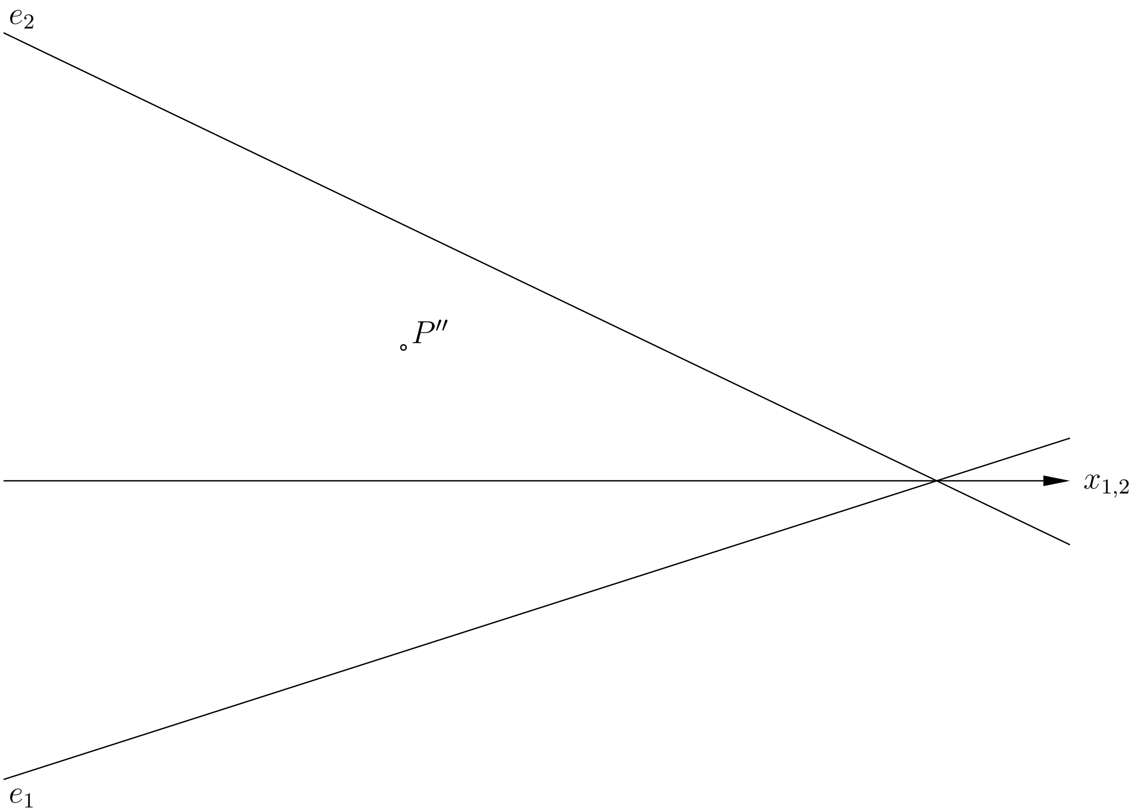
Konstruktionsbericht:

Lösung der 4. Standardaufgabe mittels einer Spurnormalen

Gegeben: Ebene ε durch e_1, e_2; Aufriss P'' von P

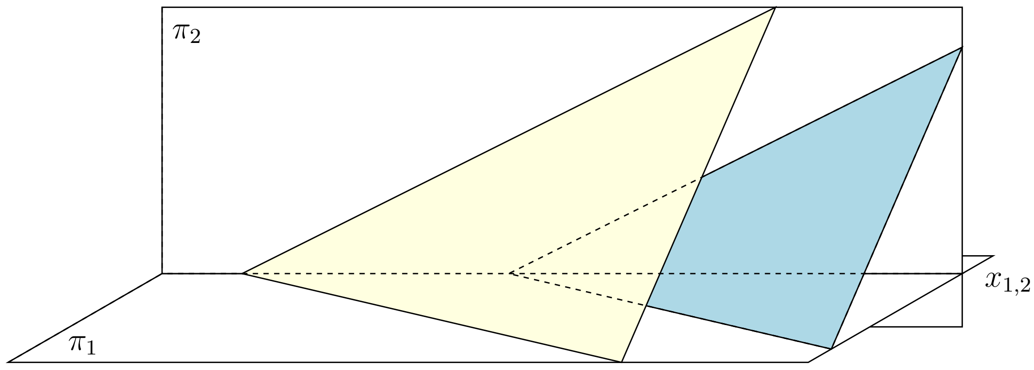
Gesucht: Grundriss P' von P, so dass $P \in \varepsilon$





Konstruktionsbericht:

5.4 Parallele Ebenen



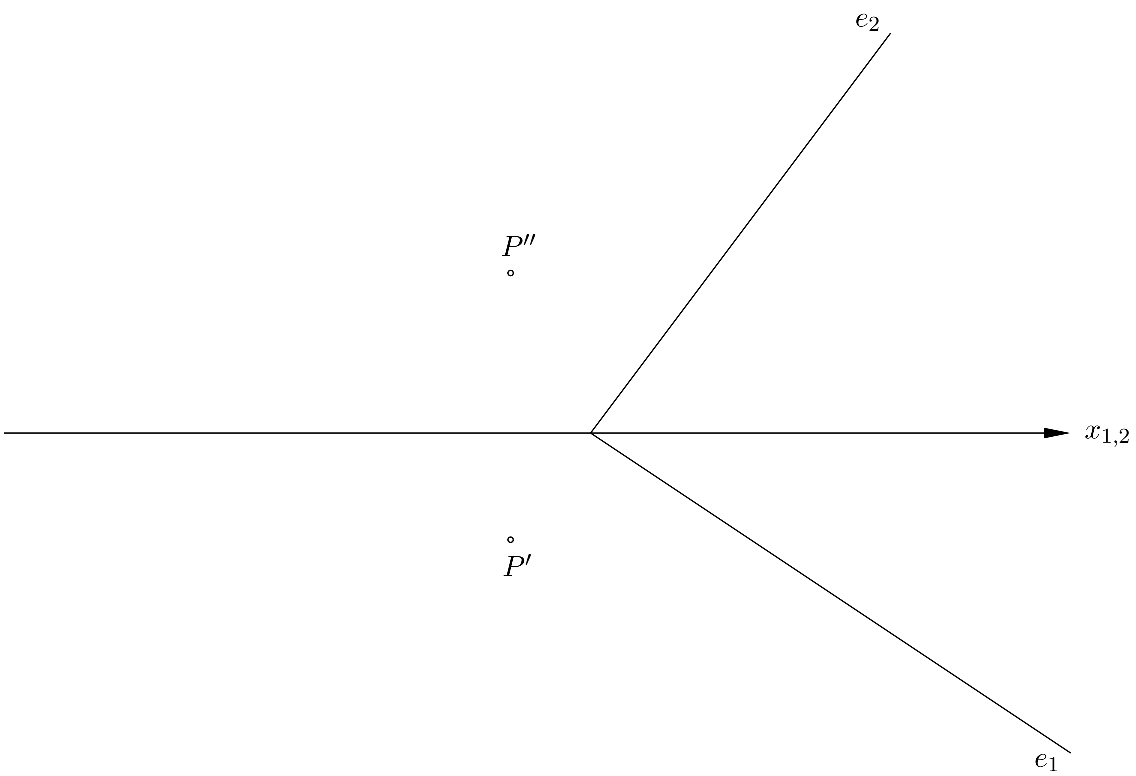
Satz: Parallele Ebenen haben parallele Spuren.

Beispiel

Gegeben: Ebene ε durch ihre Spuren e_1, e_2 und ein Punkt P

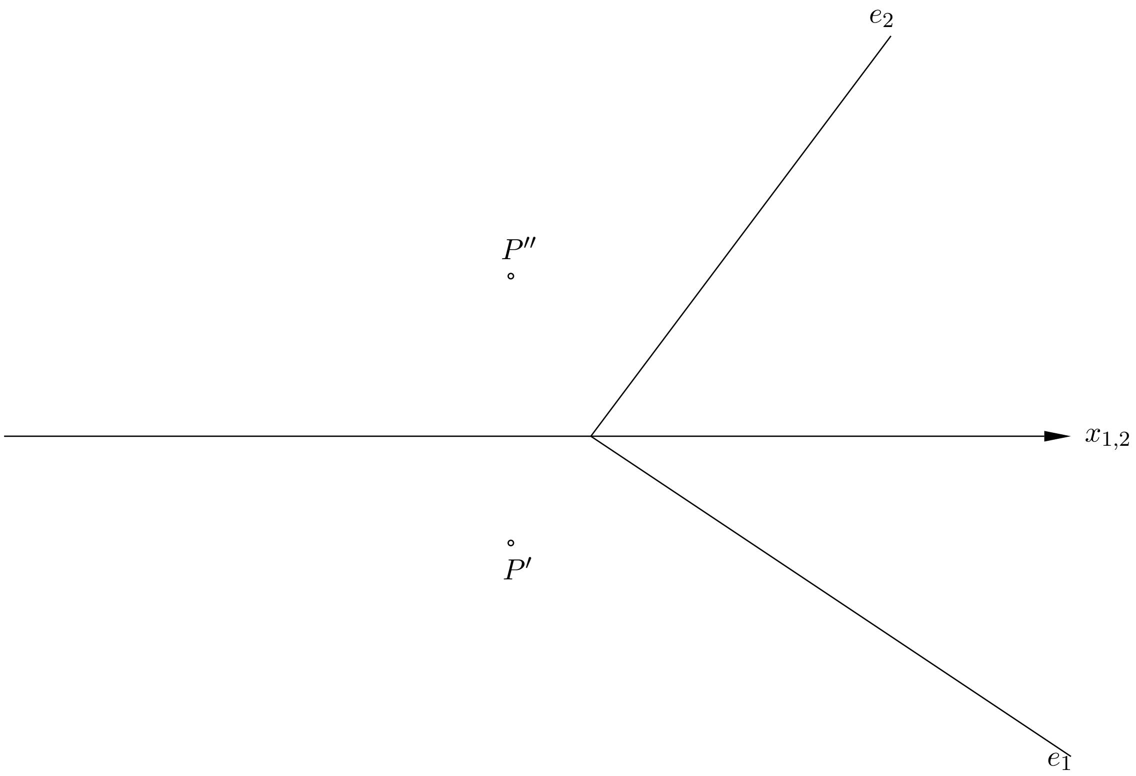
Gesucht: Ebene φ parallel zu ε mit $P \in \varphi$

Erste Lösung mit h_1: Erste Spurparallele durch P



Konstruktionsbericht:

Zweite Lösung mit h_2: Zweite Spurparallele durch P



Konstruktionsbericht:

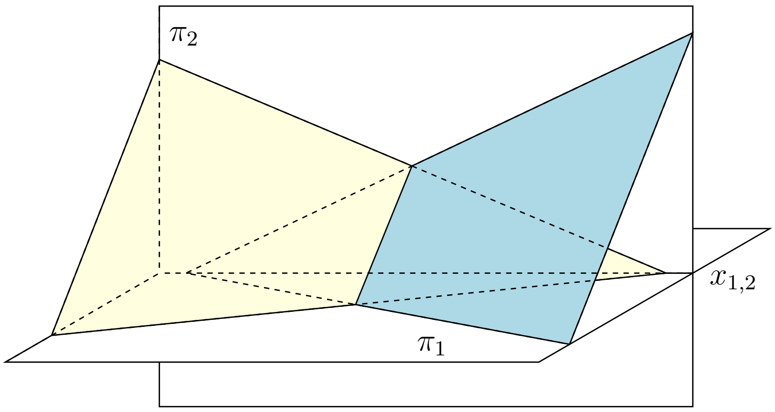
6 Schnittgerade und Durchstosspunkt

6.1 Die 5. Standardaufgabe

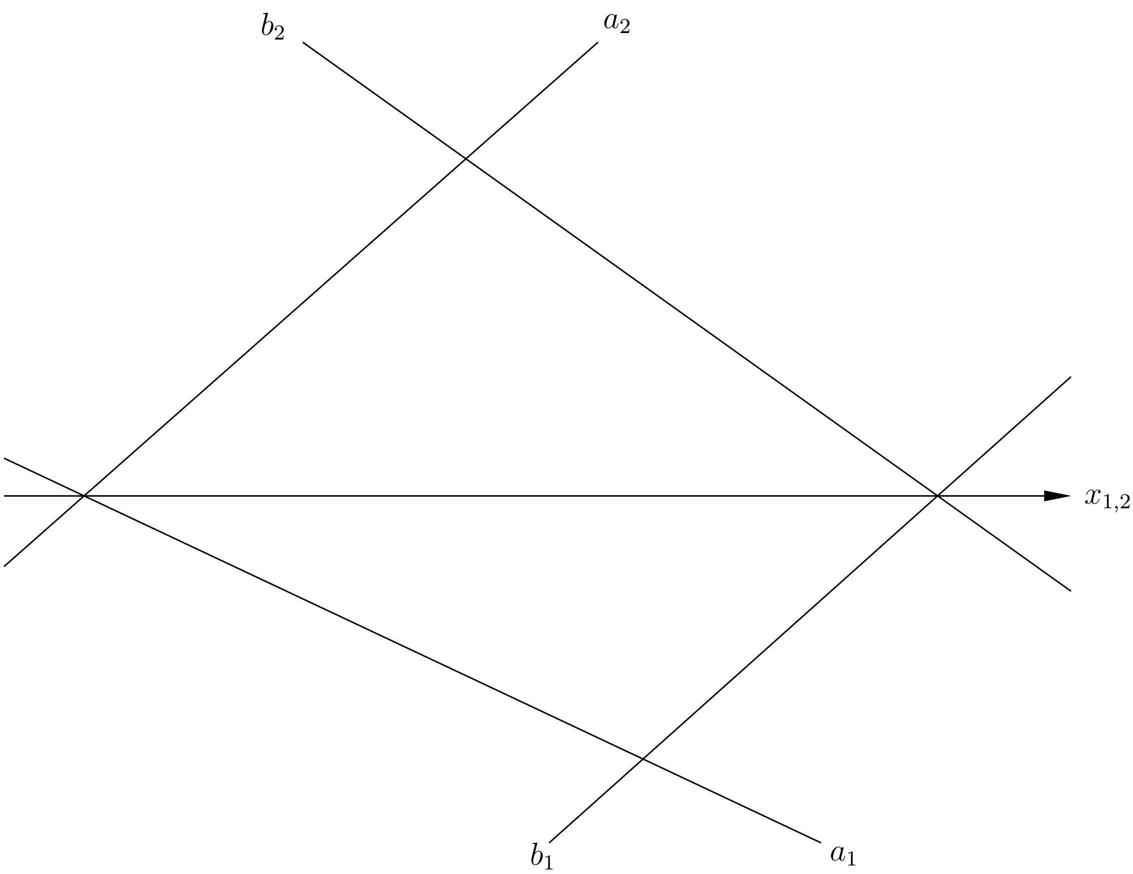
Gegeben: Zwei Ebenen α und β

Gesucht: Schnittgerade $\alpha \cap \beta \to s$

Lösungsidee: Die Schnittpunkte entsprechender Spuren (S_1, S_2) sind Punkte der Schnittgeraden.



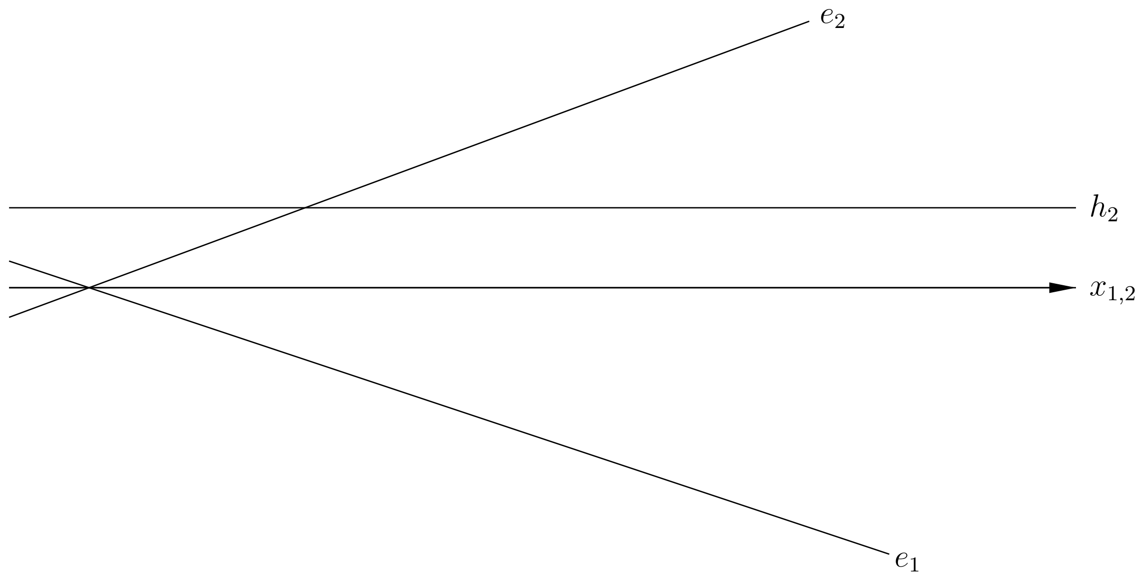
Konstruktion:



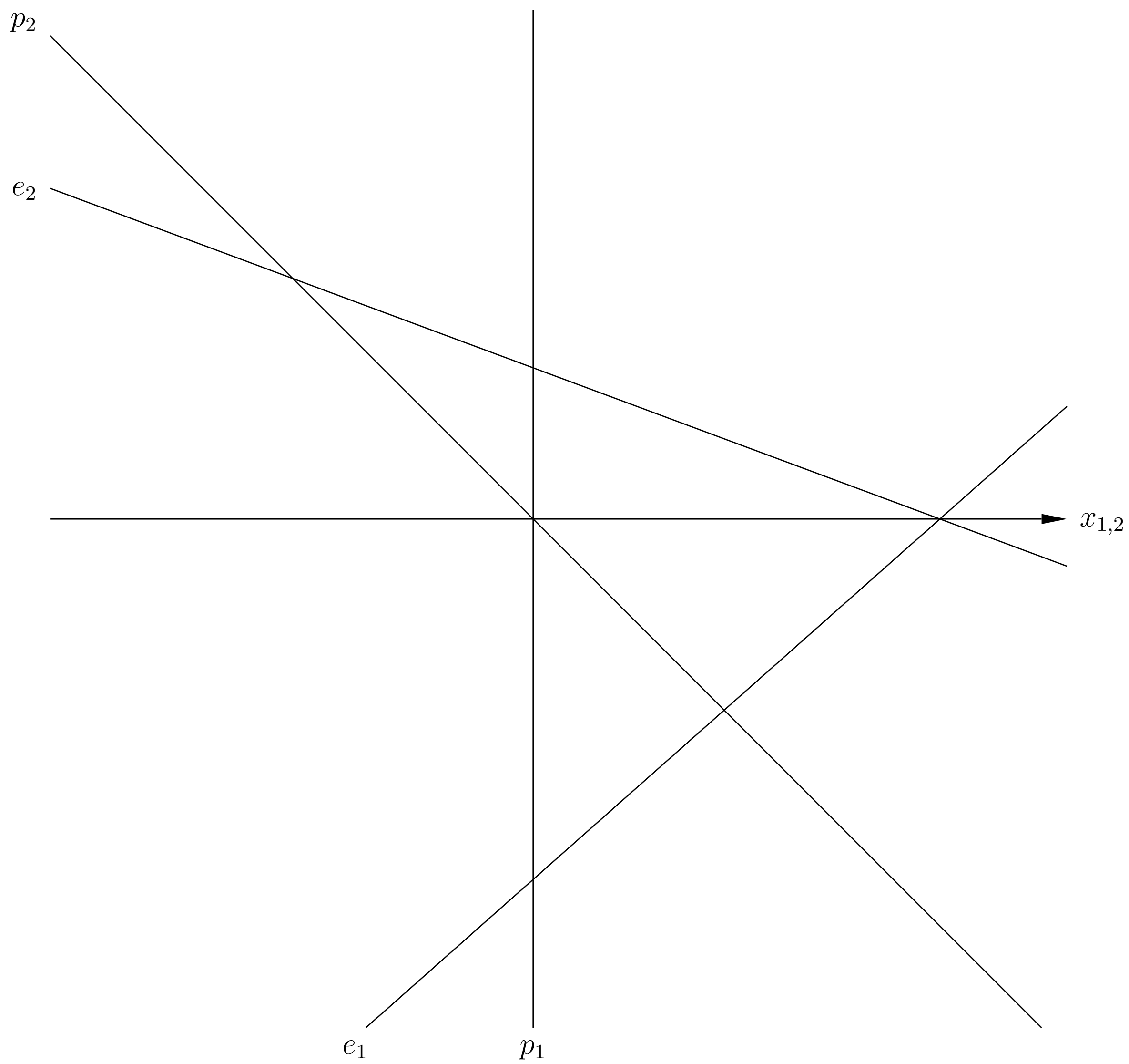
Konstruktionsbericht:

6.2 Spezialfälle zur 5. Standardaufgabe

Beispiel 1 Schnitt mit einer ersten Hauptebene

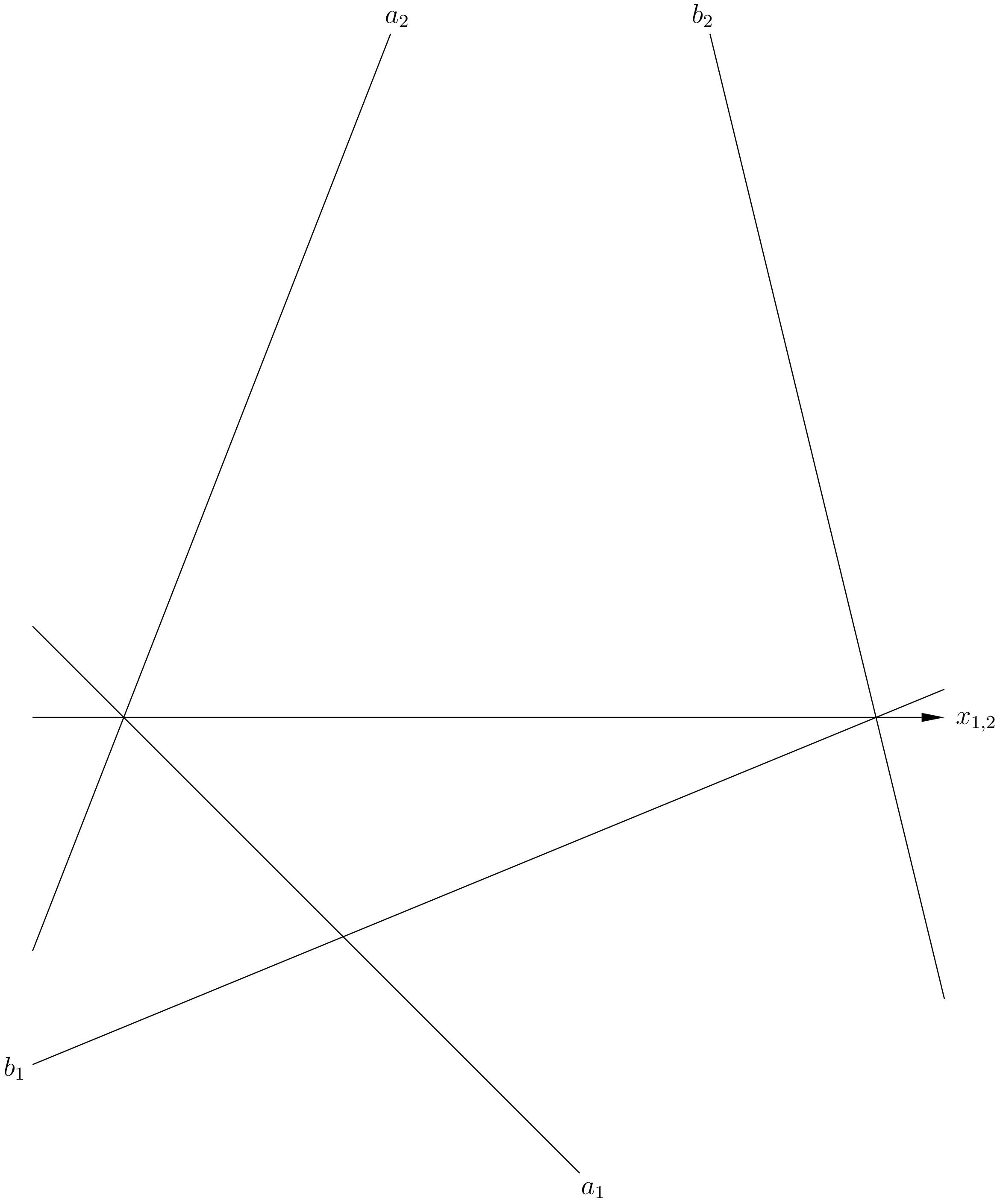


Beispiel 2 Schnitt mit einer zweitprojizierenden Ebene



Beispiel 3 Die Spuren schneiden sich nicht auf dem Blatt.

Lösungsidee: Wir verwenden eine Hauptebene als Hilfsebene. Schneiden wir diese Hauptebene mit den gegebenen Ebenen, so erhalten wir die Spurparallelen m und n. Der Schnitt von m und n ergibt einen weiteren Punkt P der gesuchten Schnittgeraden.



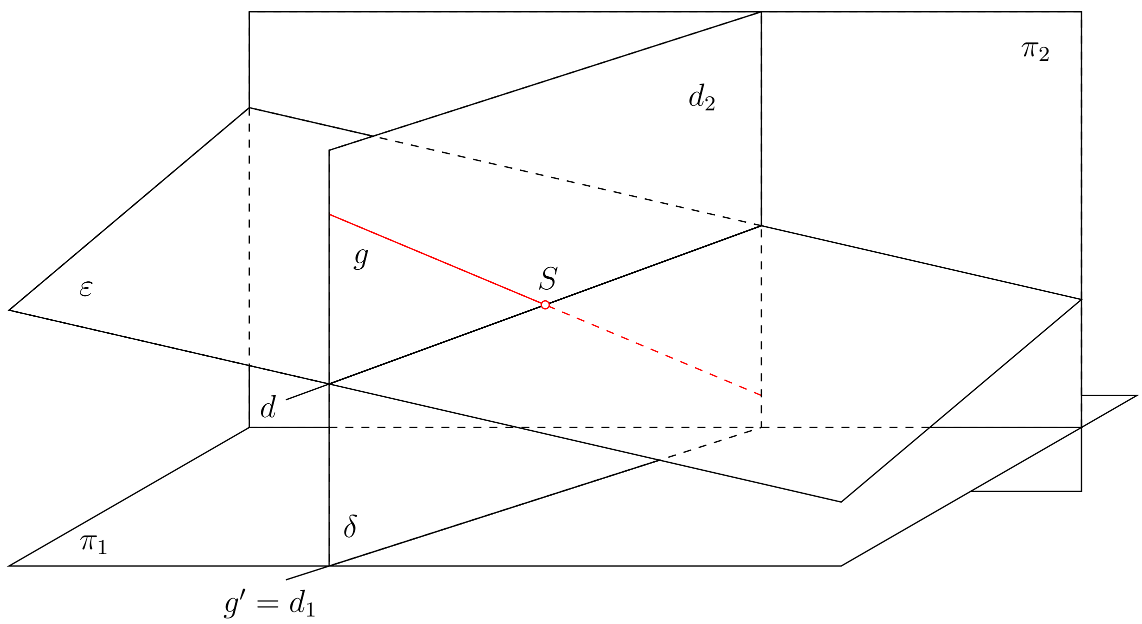
6.3 Die 6. Standardaufgabe

Gegeben: Eine Ebene $\varepsilon = ab$ (bzw. $\varepsilon = e_1e_2$) und eine Gerade g ($g \not\parallel \varepsilon$).

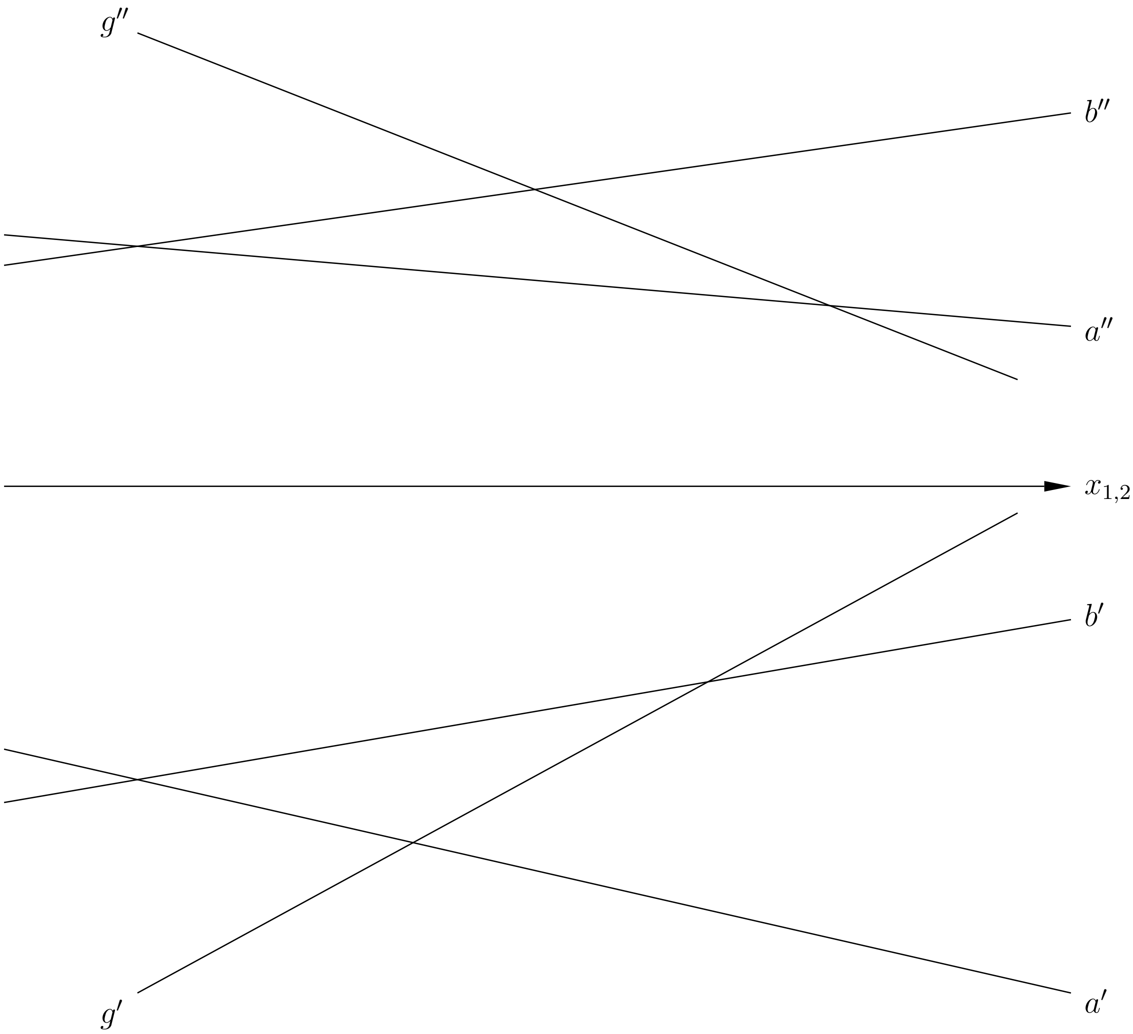
Gesucht: Schnittpunkt $S = \varepsilon \cap g$

Lösungsidee: Wir konstruieren eine erstprojizierende Hilfsebenebene δ mit gleichen Grundriss wie g. Dann schneiden wir δ und ε und erhalten eine Schnittgerade d. Diese Schnittgerade schneiden wir schliesslich mit g und erhalten S (siehe Bild).

Eine analoge Idee gilt für eine zweitprojizierende Hilfsebene mit gleichem Aufriss wie g .

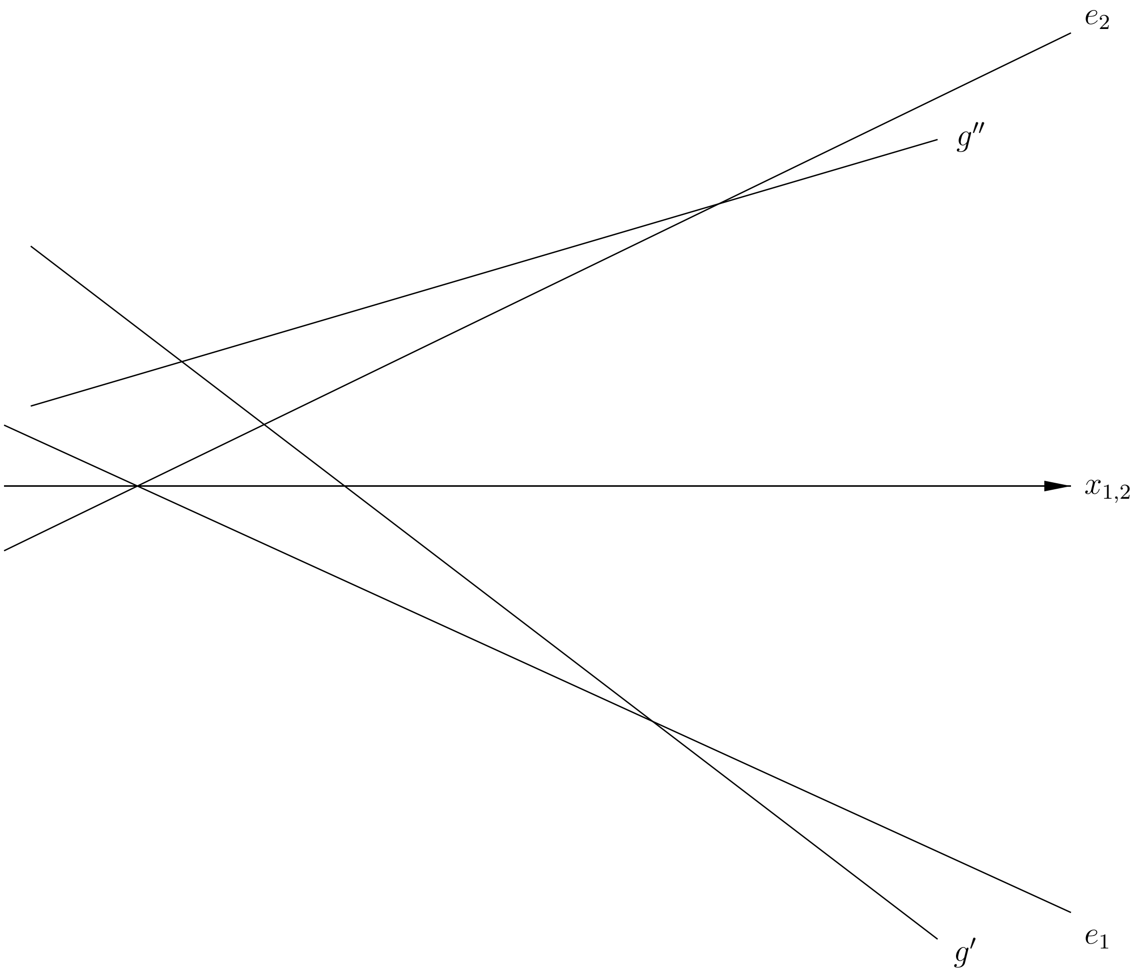


Beispiel 1 Die Ebene ε ist durch zwei schneidende Geraden a, b gegeben



Konstruktionsbericht

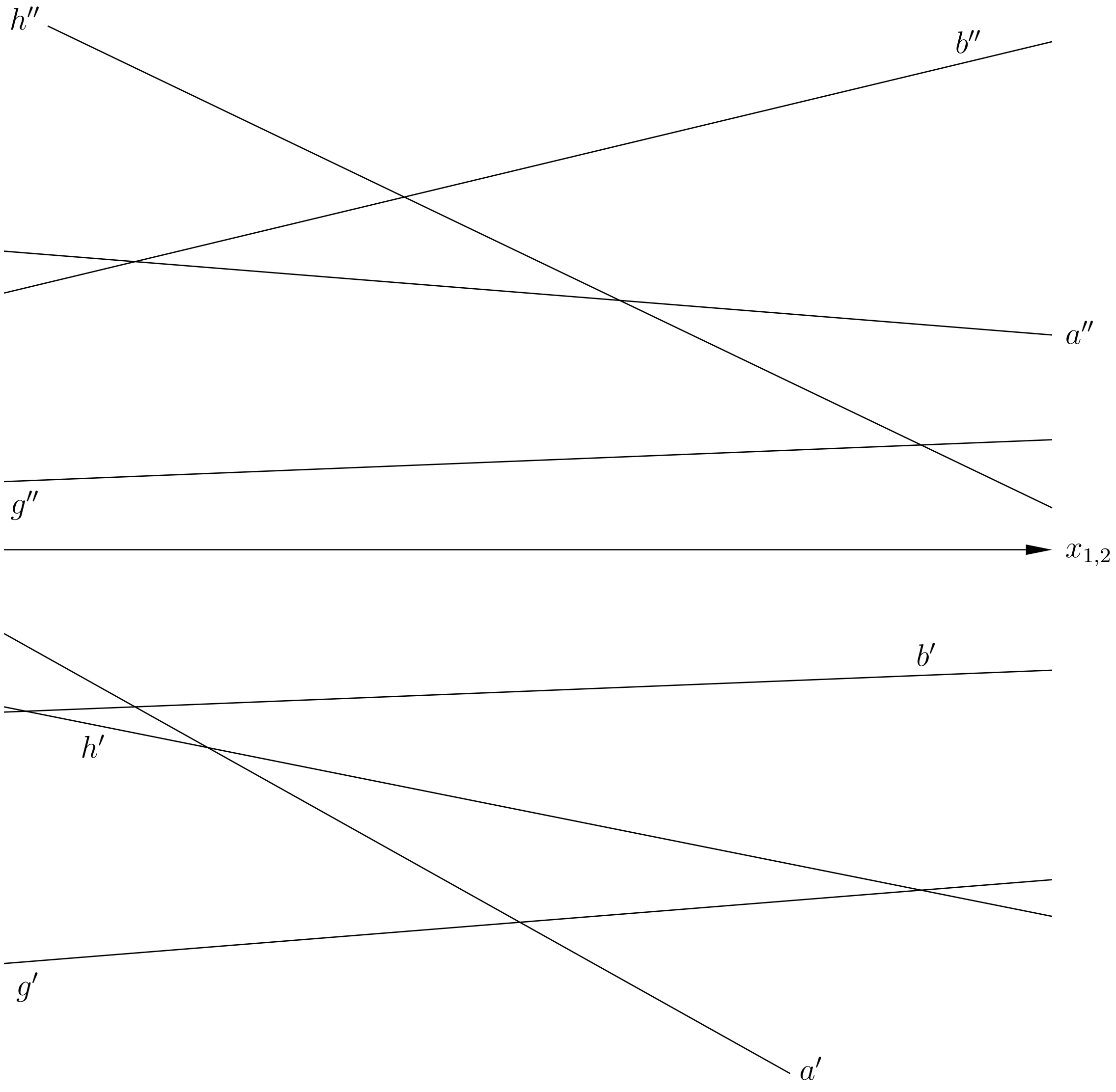
Beispiel 2 Die Ebene ε ist durch ihre Spuren e_1, e_2 gegeben



Konstruktionsbericht

1.
2.
3.
4.

Beispiel 3 Schnitt von zwei Ebenen $\varepsilon = ab$ und $\delta = gh$

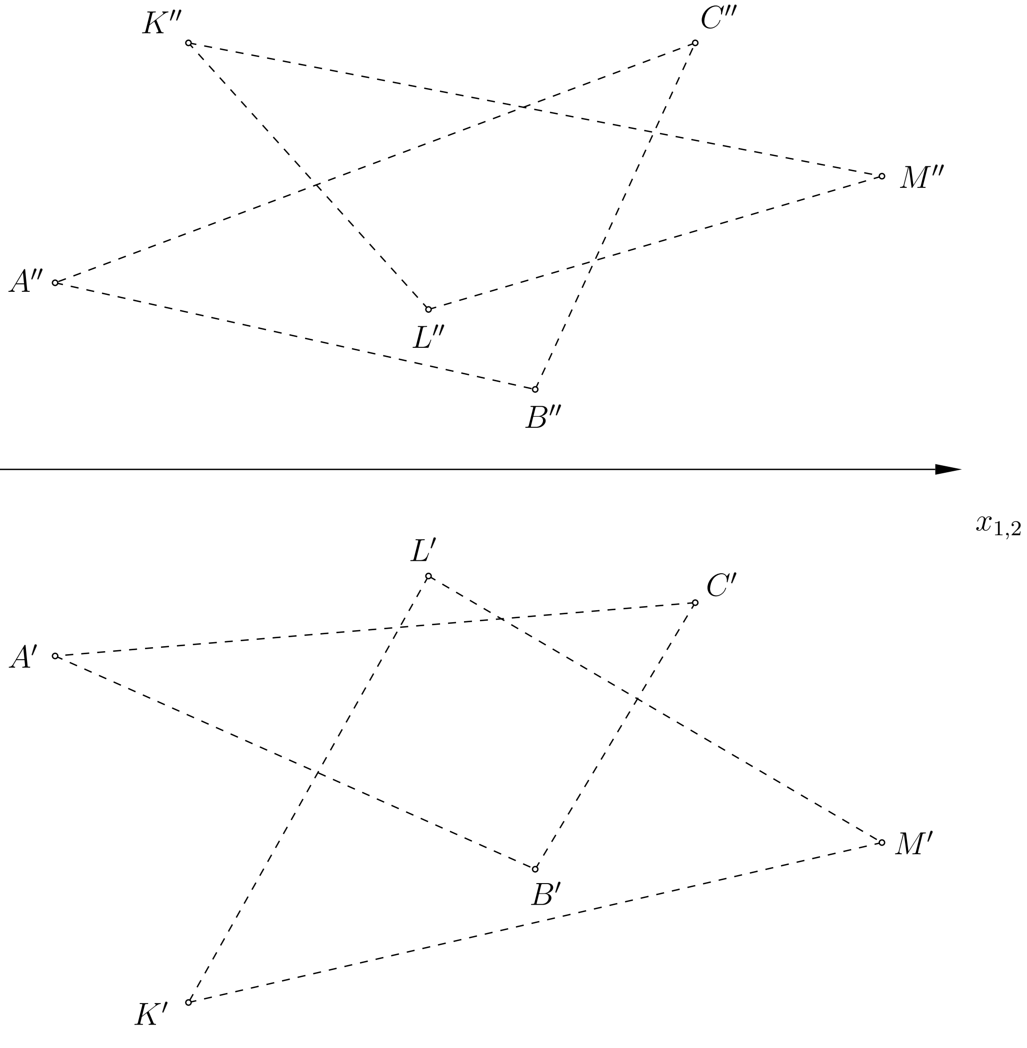


Konstruktionsbericht

Beispiel 4

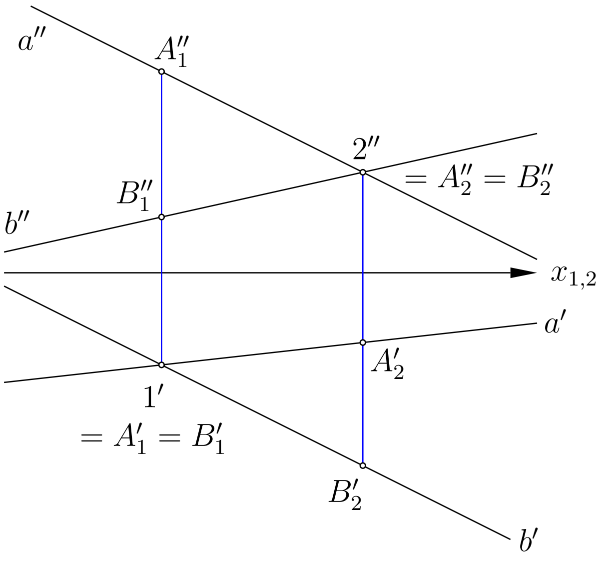
Gegeben: Dreiecke ABC und KLM

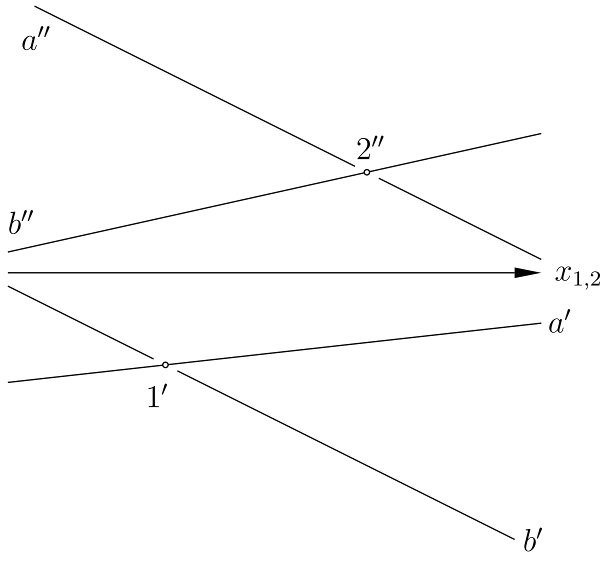
Gesucht: Teilstrecke der Schnittgeraden $s = \varepsilon(ABC) \cap \varphi(KLM)$, die innerhalb der beiden Dreiecke ABC und KLM liegt



Konstruktionsbericht

6.4 Sichtbarkeit





Bei zueinander windschiefen Geraden a, b liegt im Punkt ...

- $1' = a' \cap b'$ entweder a über b oder b über a
- $2'' = a'' \cap b''$ entweder a vor b oder b vor a

Kriterium zur Entscheidung der Sichtbarkeit im Grundriss bzw. Aufriss:

- a' sichtbar bezüglich b' (in $1' = A_1' = B_1'$) $\quad\Leftrightarrow\quad$ a über b $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\overline{A_1''x_{1,2}} > \overline{B_1''x_{1,2}}$
- b'' sichtbar bezüglich a'' (in $2'' = A_2'' = B_2''$) $\quad\Leftrightarrow\quad$ b vor a $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\overline{B_2'x_{1,2}} > \overline{A_2'x_{1,2}}$

Ob man von einer Ebene im Grundriss und im Aufriss dieselbe Seite oder verschiedene Seiten sieht, stellt man mit Hilfe eines in der Ebene liegenden Dreiecks fest: je nachdem erscheint es in den beiden Rissen mit gleichem oder mit entgegengesetztem Umlaufssinn.