Der Fibonacci-Code **Prüfungssstoff**

1. Du kannst definieren, was eine *Folge* von Elementen aus einer Menge M ist.

2. Du kannst erkennen, ob eine Folge natürlicher Zahlen *vollständig* ist; d. h. wenn sich jede natürliche Zahl als Summe von Elementen der vollständigen Folge darstellen lässt und ein Folgeglied dabei höchstens einmal vorkommt.

3. Du kannst die ersten Glieder der Fibonacci-Folge bestimmen und kennst die üblichen Bezeichnungen für diese Folgeglieder:

   $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ \ldots$

4. Du kannst das rekursives Bildungsgesetz der Fibonacci-Folge angeben:

   $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$

   Für andere rekursiven Bildungsgesetze kannst du die ersten Glieder der zugehörigen Folge angeben.

5. Dir ist bekannt, dass der Satz von Zeckendorf garantiert, dass jede natürliche Zahl als Summe einer Teilmenge der Fibonacci-Zahlen $f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8, \ldots$ dargestellt werden kann und du kannst diese Darstellung für nicht allzu grosse natürliche Zahlen in der Form einer Sequenz von Nullen und Einsen angeben, die besagt welche der Fibonacci-Zahlen ausgewählt (1) bzw. nicht ausgewählt (0) werden sollen.

   Beispiel: $50 = ?$

   Zuerst notiert man alle Fibonacci-Zahlen, die kleiner oder gleich der gegebenen Zahl (also 50) sind.

f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	$\ldots$
1	2	3	5	8	13	21	34	$\ldots$

   Dann subtrahiert man von der gegebenen Zahl die grösste dieser Fibonacci-Zahlen, so dass die Differenz nicht negativ ist: $50 - 34 = 16$

   Dann subtrahiert man von dieser Differenz wieder die grösste Fibonacci-Zahl, so dass die Differenz nicht negativ wird: $16 = 13 = 3$

   Dieses Prozedere wiederholt man so lange, bis die Differenz null wird, was bereits im nächsten Schritt der Fall ist: $3 - 3 = 0$

   Somit gilt $50 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 34$ und die Zeckendorf-Darstellung lautet dann :

   $50 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 13 + 0 \cdot 21 + 1 \cdot 34 = 00100101$

   wobei anders als im Dezimalsystem links die kleinste und rechts die grössten Fibonacci-Zahl steht. Wichtig an dieser Darstellung ist, dass keine zwei aufeinanderfolgende Ziffern den Wert 1 haben können. Wäre dies der Fall, dann wäre ihre Summe ja die nächstgrössere Fibonacci-Zahl und man könnte die beiden Einsen durch Nullen sowie die folgenden rechts stehende Stelle durch eine Eins ersetzen. *Beispiel:* $30 = \underbrace{1011001}_{\text{falsch}} = 1 + 3 + 5 + 21 = 1 + 8 + 21 = \underbrace{1000101}_{\text{richtig}}$.

   Diese Eigenschaft erlaubt es, dass eine zusätzliche Eins, die rechts an die Zeckendorf-Darstellung eingefügt wird, den Beginn einer Zeckendorf-Codierten Zahl eindeutig definiert. Die so erweiterete Zeckendorf-Darstellung wird *Fibonacci-Code* genannt. Damit können eine Sequen aus Wörtern dieses Codes erkannt werden, selbst wenn die Wörter unterschiedliche Länge haben.

6. Du kannst eine Sequenz aus Fibonacci-codierten natürlichen Zahlen decodieren.

7. Du kannst berechnen, wie viele Binärziffern (Nullen und Einsen) für das Codieren einer Folge natürlicher Zahlen (a) im Binärcode (mit Binärworten fester Länge) und (b) im Fibonacci-Code (mit Binärworten unterschiedlicher Länge) benötigt werden.