Folgen

Eine *Folge* a aus einer Menge M ist eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to M$.

(Manchmal wird eine Folge auch als Abbildung $a\colon \mathbb{N}_0 \to M$ definiert.)

Beispiele:

(a) $M = \mathbb{N}$; $a = (1, 3, 5, 7, \dots)$

(b) $M = \mathbb{Q}$; $a = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

(c) $M = \mathbb{N}$; $a = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ Fibonacci-Folge

Vollständige Folgen

Eine Folge natürlicher Zahlen wird *vollständig* genannt, wenn jede positive ganze Zahl als Summe von Folgegliedern dargestellt werden kann, in der jedes Folgeglied höchstens einmal vorkommt.

Beispiele:

(a) $a = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$

a ist vollständig und die Darstellung ist eindeutig

(b) $a = (1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$

a ist nicht vollständig

(c) $a = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

a ist vollständig aber die Darstellung nicht eindeutig

z. B. $4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 3$

Der Satz von Zeckendorf

Jede natürliche Zahl $n > 0$ kann eindeutig als Summe voneinander verschiedener, nicht direkt aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen f_i mit $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_3 = 3$, $\dots$ dargestellt werden. Es gibt somit eine Darstellung der Form

$$n = \sum_{i=2}^{k} c_i f_i \quad \text{mit } c_i \in \{0, 1\}$$

Beispiele:

(a) $10 = 2 + 8 = f_3 + f_6 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 \Rightarrow$ `01001`

(b) $19 = 1 + 5 + 13 = f_2 + f_5 + f_7$
$= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 13$
$=$ `100101`

Aufgabe 1

Bestimme die Zeckendorf-Darstellung der ersten 20 natürlichen Zahlen. Beachte, dass der grösste Summand ganz rechts steht.

n	Zeckendorf-Darstellung
1	1
2	0, 1
3	0, 0, 1
4	1, 0, 1
5	0, 0, 0, 1
6	1, 0, 0, 1
7	0, 1, 0, 1
8	0, 0, 0, 0, 1
9	1, 0, 0, 0, 1
10	0, 1, 0, 0, 1

n	Zeckendorf-Darstellung
11	0, 0, 1, 0, 1
12	1, 0, 1, 0, 1
13	0, 0, 0, 0, 0, 1
14	1, 0, 0, 0, 0, 1
15	0, 1, 0, 0, 0, 1
16	0, 0, 1, 0, 0, 1
17	1, 0, 1, 0, 0, 1
18	0, 0, 0, 1, 0, 1
19	1, 0, 0, 1, 0, 1
20	0, 1, 0, 1, 0, 1

Alphabete, Wörter, Sprachen und Codes

Ein *Alphabet* Σ ist eine Menge von Zeichen.

Ein *Wort* w über einem Alphabet Σ ist eine Folge von Zeichen aus Σ.

Eine *Sprache* L ist eine Menge von Wörtern über einem Alphabet Σ.

Ein *Code* C ist eine Abbildung von einer Sprache L_1 (über einem Alphabet Σ_1) auf eine Sprache L_2 (über einem Alphabet Σ_2), die jedem Wort $w_1 \in L_1$ umkehrbar eindeutig ein Wort $w_2 \in L_2$ zuordnet. (Es ist auch möglich, dass $\Sigma_1 = \Sigma_2$ oder sogar $L_1 = L_2$ gilt.)

Der Fibonacci-Kode

Da in der Zeckendorf-Darstellung ganz rechts immer die Ziffer Eins stehen muss (warum?), können wir durch Anhängen einer weiteren Eins auf der rechten Seite einen Code erzeugen bei dem wir die Codewörter ohne ein spezielles Trennzeichen verketten können, obwohl sie unterschiedliche Länge haben. Dieser Code wird *Fibonacci-Kode* genannt.

Beispiel: $7 \rightarrow$ `01011`

Aufgabe 2

Welche natürlichen Zahlen werden durch die folgende Sequenz von Zeichen im Fibonacci-Kode dargestellt?

`10101100011001001100101100010111000011`

12, 5, 16, 11, 18, 14