Der Fibonacci-Kode

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Was ist eine Folge

(a) reeller Zahlen?

(b) natürlicher Zahlen?

Aufgabe 1

(a) Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet.

(b) Eine Folge natürlicher Zahlen ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl a_n zuordnet.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Folgen sind vollständig?

(a) Folge der geraden natürlichen Zahlen:
$(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$

(b) Folge der Zahlen mit nur einer Ziffer ungleich Null:
$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, \dots)$

(c) Folge der Zweierpotenzen:
$(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$

Aufgabe 2

(a) Die Folge der geraden natürlichen Zahlen
$(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$
ist nicht vollständig, da keine ungerade Zahl als Summe (verschiedener) gerader Zahlen dargestellt werden kann.

(b) Folge der Zahlen mit nur einer Ziffer ungleich Null
$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, \dots)$
ist vollständig, da sich jede natürliche Zahl auf genau eine Weise als eine Summe aus 1ern, 10ern, 100ern, usw. darstellen lässt.

(c) Die Folge der Zweierpotenzen
$(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$
ist vollständig, da sich jede natürliche Zahl als Summe von Zweierpotenzen darstellen lässt:
$46 = 32 + 8 + 4 + 2$

Aufgabe 3

Bestimme die Fibonacci-Zahlen f_1 bis f_{12}

Aufgabe 3

$f_1 = 1$	$f_4 = 3$	$f_7 = 13$	$f_{10} = 55$
$f_2 = 1$	$f_5 = 5$	$f_8 = 21$	$f_{11} = 89$
$f_3 = 2$	$f_6 = 8$	$f_9 = 34$	$f_{12} = 144$

Aufgabe 4

Gib das rekursive Bildungsgesetz der Fibonacci-Folge (f_n) an.

Aufgabe 4

$f_1 = 1,\ f_2 = 1;\ f_n = f_{n-1} + f_{n-1}$ für $n \geq 3$

Aufgabe 5

Gegeben ist die rekursiv definiert Folge (a_n):

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$; $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$

Bestimme die Folgeglieder a_3, a_4 und a_5 dieser Folge.

Aufgabe 5

$a_1 = 1,\ a_2 = 3;\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$

Aufgabe 5

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3;\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + a_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 + a_2 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 + a_3 = 2 \cdot 17 + 7 = 41$$

Aufgabe 6

Welche natürlichen Zahlen werden durch die folgenden Zeckendorf-Codes dargestellt?

(a) 0101_Z

(b) 000001_Z

(c) 1001001_Z

(d) 1011001_Z

Aufgabe 6

Die für diese Aufgabe nötigen Fibonacci-Zahlen wurden bereits in Aufgabe 3 bestimmt. Beachte, dass die erste Ziffer links mit $f_2 = 1$ beginnt.

(a) $0101_Z = 2 + 5 = 7$

(b) $000001_Z = 13$

(c) $1001001_Z = 1 + 5 + 21 = 27$

(d) 1011001_Z ungültig (enthält 11)

Aufgabe 7

Bestimme die Zeckendorf-Darstellungen der folgenden Zahlen.

(a) 4
(b) 8
(c) 17
(d) 100

Aufgabe 7

Die für diese Aufgabe nötigen Fibonacci-Zahlen wurden bereits in Aufgabe 3 bestimmt. Beachte, dass die erste Ziffer links mit $f_2 = 1$ beginnt.

(a) $4 = 1 + 3 = 101_Z$

(b) $8 = 8 = 00001_Z$

(c) $17 = 1 + 3 + 13 = 101001_Z$

(d) $100 = 3 + 8 + 89 = 0010100001_Z$

Aufgabe 8

Eine Sequenz natürlicher Zahlen wurde mit dem Fibonacci-Code codiert.

10011011010011111000011

Decodiere den Code und gib die codierten natürlichen Zahlen an.

Aufgabe 8

1001101101001111000011

Aufgabe 8

10011011010011111000011

Da die Zeckendorf-Darstellung nie zwei aufeinanderfolgende Einsen enthält, muss der durch die zusätzliche 1 gebildete Fibonacci-Code überall dort, wo 11 steht, eine Wortgrenze enthalten. Somit:
Ersetze 11 durch 1 + *Wortgrenze*

Aufgabe 8

`1001101101001111000011`

Da die Zeckendorf-Darstellung nie zwei aufeinanderfolgende Einsen enthält, muss der durch die zusätzliche 1 gebildete Fibonacci-Code überall dort, wo 11 steht, eine Wortgrenze enthalten. Somit:
Ersetze 11 durch 1 + *Wortgrenze*

$\Rightarrow$ `1001,01,01001,1,00001`

Aufgabe 8

`1001101101001111000011`

Da die Zeckendorf-Darstellung nie zwei aufeinanderfolgende Einsen enthält, muss der durch die zusätzliche 1 gebildete Fibonacci-Code überall dort, wo 11 steht, eine Wortgrenze enthalten. Somit:
Ersetze 11 durch 1 + *Wortgrenze*

$\Rightarrow$ `1001,01,01001,1,00001`

Nun müssen wir nur noch die Zeckendorf-Darstellung in natürliche Zahlen umrechnen:

Aufgabe 8

`1001101101001111000011`

Da die Zeckendorf-Darstellung nie zwei aufeinanderfolgende Einsen enthält, muss der durch die zusätzliche 1 gebildete Fibonacci-Code überall dort, wo 11 steht, eine Wortgrenze enthalten. Somit:
Ersetze 11 durch 1 + *Wortgrenze*

$\Rightarrow$ `1001,01,01001,1,00001`

Nun müssen wir nur noch die Zeckendorf-Darstellung in natürliche Zahlen umrechnen:

$\Rightarrow$ 6, 2, 10, 1, 8

Aufgabe 9

Codiere die Zahlenfolge 1, 3, 2, 1, 15, 5, 4, 5

(a) durch den Binärcode mit 4 Bit pro Codewort

(b) durch den Fibonacci-Code

Welcher Code benötigt weniger Binärziffern (0/1) zum Codieren der gegebenen Zahlenfolge?

Aufgabe 9

Zahl	Binär	Fibonacci
1	0001	11
3	0011	0011
2	0010	011
1	0001	11
15	1111	0100011
5	0101	00011
4	0100	1011
5	0101	00011
Bits	32	32

$\Rightarrow$ Beide Codierungen sind *hier* gleich effizient.