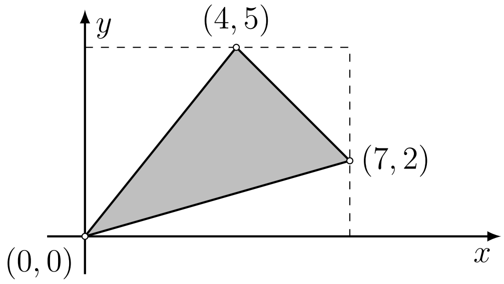
Flächeninhalt ebener Polygone **Lösungen**

Aufgabe 1

Berechne den Flächeninhalt A des folgenden Dreiecks aus den Koordinaten seiner Ecken.

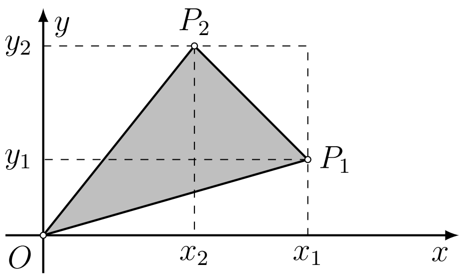


$A = 7 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$

$= 35 - 7 - 10 - 4.5 = 13.5$

Aufgabe 2

Leite eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ΔOP_1P_2 aus den Koordinaten der Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ her und vereinfache sie so weit wie möglich.



$$A = x_1y_2 - \tfrac{1}{2}x_1y_1 - \tfrac{1}{2}x_2y_2 - \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)$$

$$= x_1y_2 - \tfrac{1}{2}x_1y_1 - \tfrac{1}{2}x_2y_2 - \tfrac{1}{2}x_1y_2 + \tfrac{1}{2}x_1y_1 + \tfrac{1}{2}x_2y_2 - \tfrac{1}{2}x_2y_1$$

$$= x_1y_2 - \tfrac{1}{2}x_1y_2 - \tfrac{1}{2}x_2y_1 = \tfrac{1}{2}x_1y_2 - \tfrac{1}{2}x_2y_1 = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Aufgabe 3

(a) Kontrolliere, ob die obige Formel das richtige Resultat von Beispiel 1 liefert

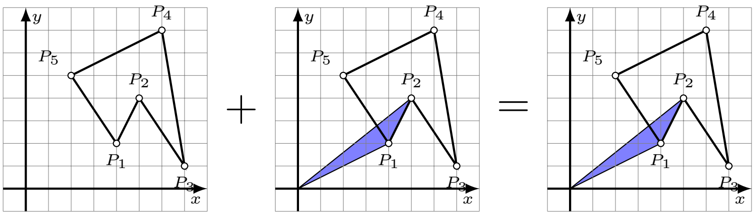
$A = \frac{1}{2}(7 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13.5$ (stimmt)

(b) Was geschieht, wenn die Punkte in umgekehrter Reihenfolge in die Formel eingesetzt werden?

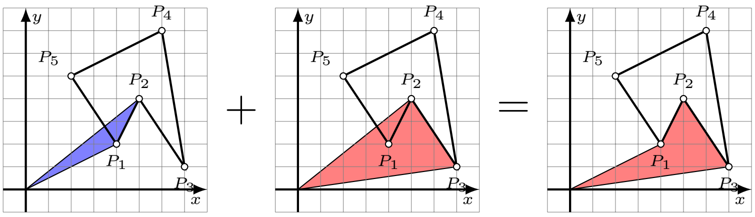
$A = \frac{1}{2}(4 \cdot 2 - 7 \cdot 5) = \frac{1}{2} \cdot (-27) = -13.5$

Aufgabe 4

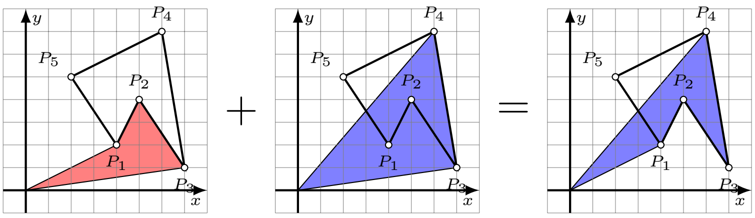
Ergänze die fehlenden Schritte, um den Flächeninhalt des Polygons mit der oben hergeleiteten Flächenformel für Dreiecke zu berechnen. Da alle Dreiecke den Ursprung als Ecke enthalten, werden Flächenteile ausserhalb des Polygons berücksichtigt. Weil die Flächeninhalte der Dreiecke je nach Umflaufssinn positiv (blau) oder negativ (rot) sind, werden die überschüssigen Flächenanteile früher oder später wieder aus der Flächensumme entfernt. $P_1(4,2)$, $P_2(5,4)$, $P_3(7,1)$, $P_4(6,7)$, $P_5(2,5)$



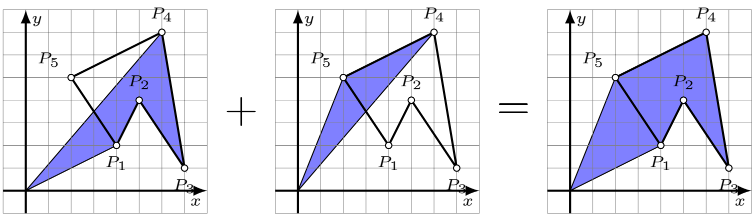
Schritt 1: $2A = 0 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 6$



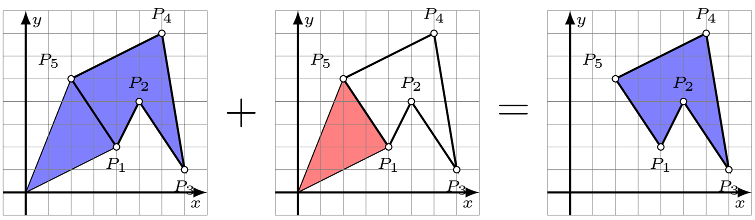
Schritt 2: $2A = 6 + 5 \cdot 1 - 7 \cdot 4 = -17$



Schritt 3: $2A = -17 + 7 \cdot 7 - 6 \cdot 1 = 26$



Schritt 4: $2A = 26 + 6 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 42$



Schritt 5: $2A = 42 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = 26$

Flächeninhalt: 13

Flächenformel für Polygone

Die Flächenformel zur Berechnung eines Polygons lautet daher:

$$A = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right) + (x_n y_1 - x_1 y_n)\right)$$

Das „Vorzeichen" der Fläche hängt von der Richtung ab, in der man die Punkte durchläuft:

- Umlauf im Gegenuhrzeigersinn: $A > 0$
- Umlauf im Uhrzeigersinn: $A < 0$

Aufgabe 5

Vervollständige die Python-Funktion `polyarea(...)`, die mit der obigen Formel aus einer Liste von Punkten (*List of Points*)

```
LoP = [(x1,y1), (x2,y2), ..., (xN,yN)]
```

den Flächeninhalt des zugehörigen Polygons berechnet.

```python
def polyarea(LoP):
    '''Gibt den Inhalt eines überschneidungsfreien ebenen
    Polygons mit den Ecken in LoP (List of Points) zurück'''

    A = 0

    ...
```

```python
# Testcode (Siehe Beispiel aus dem Unterricht)
L = [(4,2), (5,4), (7,1), (6,7), (2,5)]

A = polyarea(L)
print(A) # => sollte 13 eregeben
```

Aufgabe 6

Berechne möglichst geschickt den Flächeninhalt des überschneidungsfreien Polygons, das von folgenden Punkten begrenzt wird.

$P_1(13,6)$

$P_2(9,8)$

$P_3(8,13)$

$P_4(5,9)$

$P_5(1,8)$

$P_6(4,6)$

$P_7(2,2)$

$P_8(6,3)$

$P_9(10,1)$

$P_{10}(10,5)$