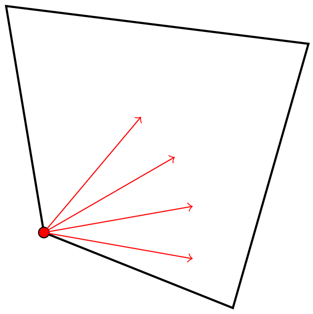
Das Problem der Museumswächter

Die Fragestellung

Gegeben: Ein Museum, dessen Grundriss n Ecken hat.

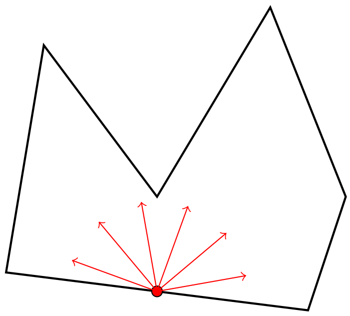
Gesucht: Eine obere Schranke für die minimale Anzahl von Museumswächtern und ihre Positionen („Wächterpunkte"), so dass jeder Punkt des Museums durch mindestens einen Sehstrahl eines Wächters getroffen wird.

Beispiel 1



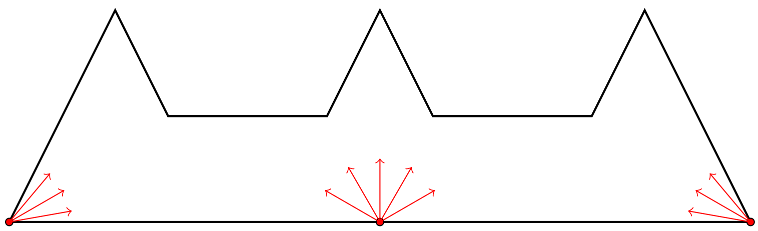
1 Wächterpunkt

Beispiel 2



1 Wächterpunkt

Beispiel 3



3 Wächterpunkte

Anwendungen

- Kameraüberwachung
- Beleuchtung von Räumen
- Steuerung von Robotern
- Messstationen zur Warnung vor Naturkatastrophen

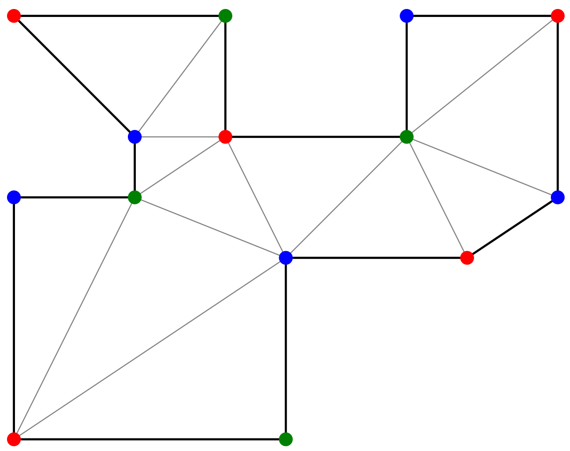
Der Satz von Chvátal

Der folgende Satz liefert eine obere Schranke für die minimale Anzahl der benötigten Wächterpunkte:

Zur Überwachung eines ebenen überschneidungsfreien geschlossen n-eckigen Polygons werden höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächterpunkte benötigt.

(Vašek Chvátal, 1975)

Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)
3. Jede Farbklasse ist eine Eckenmenge, von der aus jedes Dreieck und damit jeder Punkt der Fläche überwacht werden kann.
4. $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ist die Anzahl Punkte der kleinsten Farbklasse.

Bemerkung

Der Satz liefert uns nur eine obere Schranke für die benötigte Anzahl der Wächterpunkte.

- In Beispiel 2 genügt *ein* Wächterpunkt.
- In Beispiel 3 sind $\lfloor 9/3 \rfloor = 3$ Wächterpunkte notwendig.