

# Das Problem der Museumswächter

(Art Gallery Problem)

# Die Fragestellung

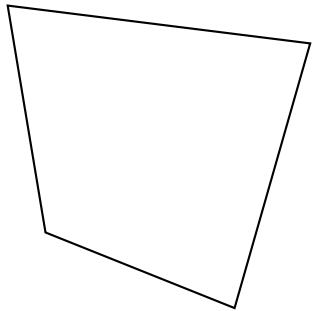
*Gegeben:* Ein Museum, dessen Grundriss  $n$  Ecken hat.

# Die Fragestellung

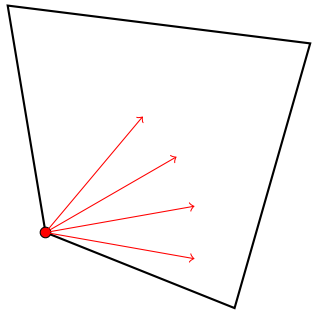
*Gegeben:* Ein Museum, dessen Grundriss  $n$  Ecken hat.

*Gesucht:* Eine obere Schranke für die minimale Anzahl von Museumswächtern und ihre Positionen („Wächterpunkte“), so dass jeder Punkt des Museums durch mindestens einen Sehstrahl eines Wächters getroffen wird.

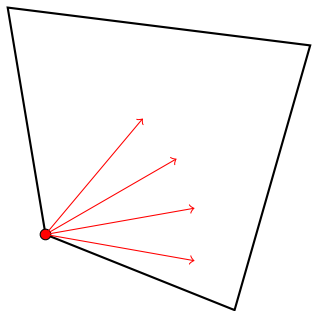
## Beispiel 1



# Beispiel 1

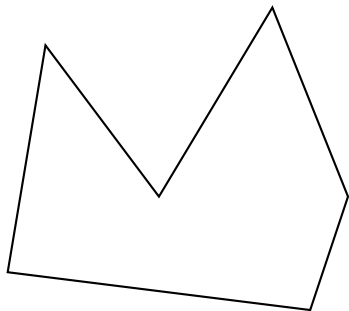


# Beispiel 1

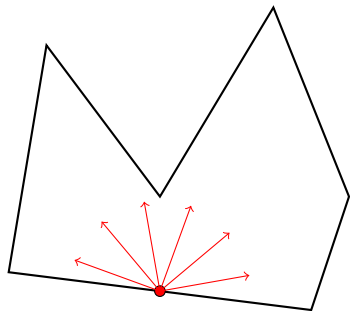


1 Wächterpunkt

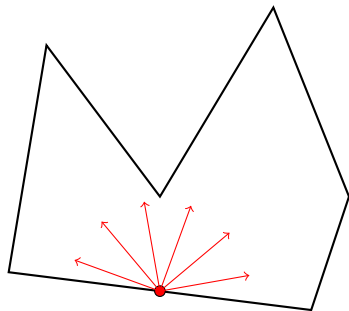
## Beispiel 2



## Beispiel 2

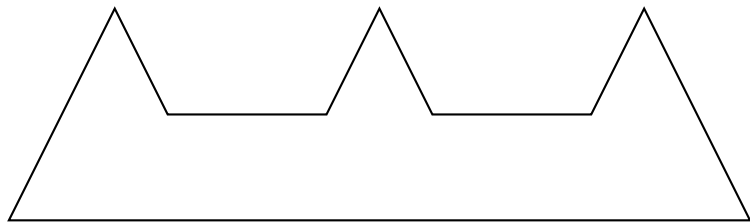


## Beispiel 2

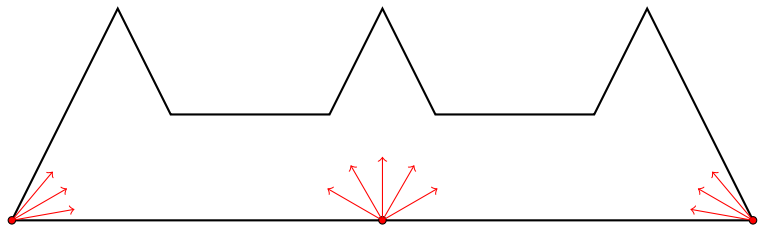


1 Wächterpunkt

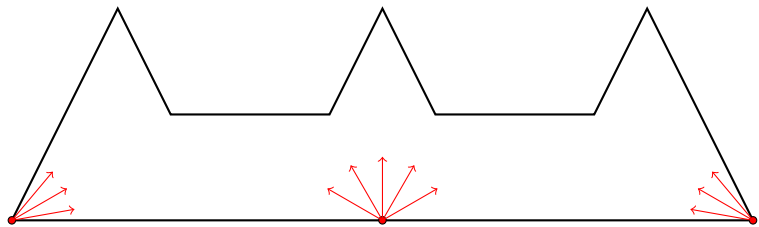
## Beispiel 3



## Beispiel 3



## Beispiel 3



3 Wächterpunkte

# Anwendungen

# Anwendungen

- ▶ Kameraüberwachung

# Anwendungen

- ▶ Kameraüberwachung
- ▶ Beleuchtung von Räumen

# Anwendungen

- ▶ Kameraüberwachung
- ▶ Beleuchtung von Räumen
- ▶ Steuerung von Robotern

# Anwendungen

- ▶ Kameraüberwachung
- ▶ Beleuchtung von Räumen
- ▶ Steuerung von Robotern
- ▶ Messstationen zur Warnung vor Naturkatastrophen

# Der Satz von Chvátal

Der folgende Satz liefert eine obere Schranke für die minimale Anzahl der benötigten Wächterpunkte:

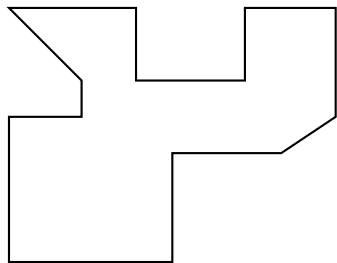
# Der Satz von Chvátal

Der folgende Satz liefert eine obere Schranke für die minimale Anzahl der benötigten Wächterpunkte:

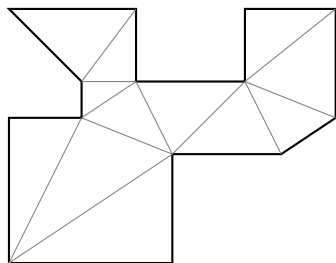
Zur Überwachung eines ebenen überschneidungsfreien geschlossen  $n$ -eckigen Polygons werden höchstens  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  Wächterpunkte benötigt.

(Vašek Chvátal, 1975)

# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)

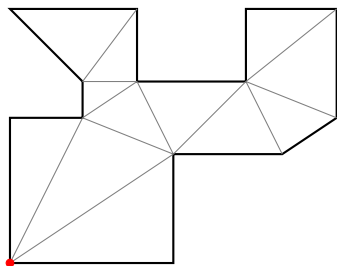


# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



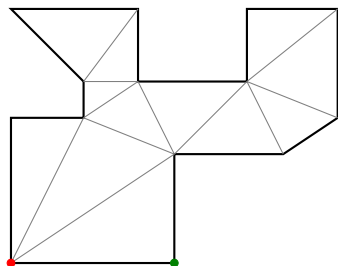
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.

## Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



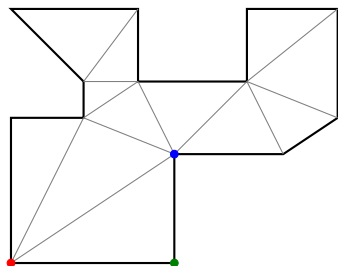
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

## Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



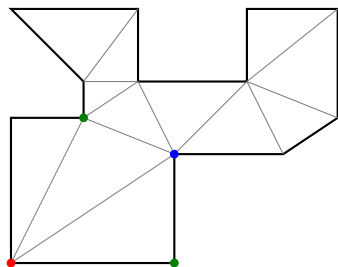
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



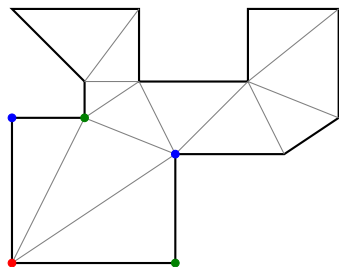
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

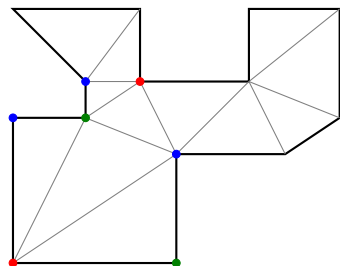
# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)



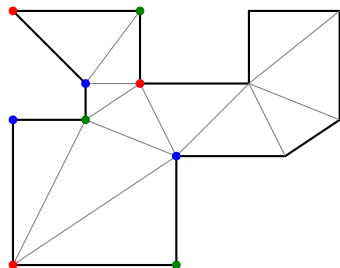
# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

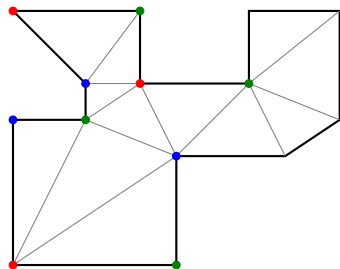


# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



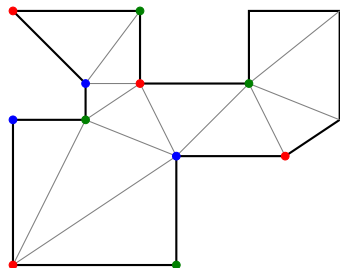
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

## Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



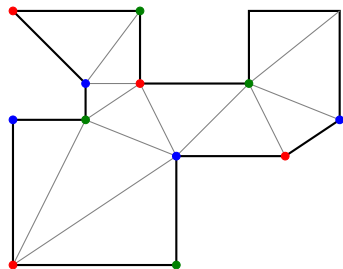
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

## Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



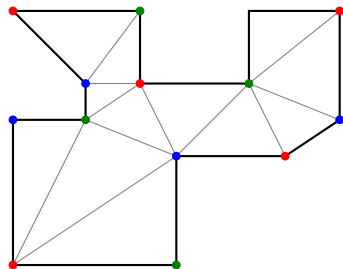
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



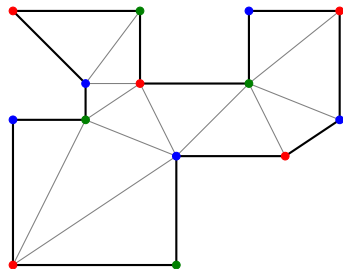
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



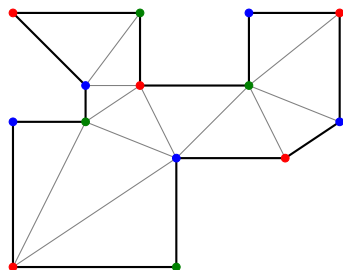
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



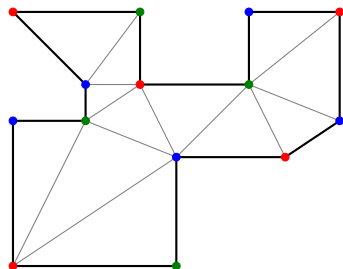
1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)

# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)
3. Jede Farbkategorie ist eine Eckenmenge, von der aus jedes Dreieck und damit jeder Punkt der Fläche überwacht werden kann.

# Graphentheoretische Beweisskizze (nach S. Fisk)



1. Zerlege den Grundriss durch Sehnen in Dreiecke und deute die Ecken und Kanten als Graph.
2. Wähle eine 3-Färbung des Graphen. (Das geht immer!)
3. Jede Farbklasse ist eine Eckenmenge, von der aus jedes Dreieck und damit jeder Punkt der Fläche überwacht werden kann.
4.  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  ist die Anzahl Punkte der kleinsten Farbklasse.

## Bemerkung

Der Satz liefert uns nur eine obere Schranke für die benötigte Anzahl der Wächterpunkte.

## Bemerkung

Der Satz liefert uns nur eine obere Schranke für die benötigte Anzahl der Wächterpunkte.

- ▶ In Beispiel 2 genügt *ein* Wächterpunkt.

## Bemerkung

Der Satz liefert uns nur eine obere Schranke für die benötigte Anzahl der Wächterpunkte.

- ▶ In Beispiel 2 genügt *ein* Wächterpunkt.
- ▶ In Beispiel 3 sind  $\lfloor 9/3 \rfloor = 3$  Wächterpunkte notwendig.