Aufgabe 1

$a = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$
$b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$
$\mathrm{ggT}(a, b) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Aufgabe 2

greatest common divisor (gcd)

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}\mathrm{ggT}(51, 85) &= \mathrm{ggT}(85, 51) = \mathrm{ggT}(34, 51) = \mathrm{ggT}(51, 34)\\ &= \mathrm{ggT}(17, 34) = \mathrm{ggT}(34, 17) = \mathrm{ggT}(17, 17)\\ &= \mathrm{ggT}(0, 17) = \mathrm{ggT}(17, 0) = 17\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}\mathrm{ggT}(-5, 12) &= \mathrm{ggT}(12, -5) = \mathrm{ggT}(17, -5) = \mathrm{ggT}(22, -5)\\ &= \mathrm{ggT}(27, -5) = \mathrm{ggT}(32, -5) = \ldots\end{aligned}$$

Im ersten Schritt werden die beiden Operanden vertauscht. Danach wird der erste Operand immer grösser und der zweite verändert sich nicht mehr. Da er so nicht null werden kann, bricht das Verfahren nicht ab und läuft endlos weiter.

Das Problem kann gelöst werden, indem man vor der Ausführung des Algorithmus die Operanden a und b durch ihre Absolutbeträge $|a|$ und $|b|$ ersetzt.

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}\mathrm{ggT}(100, 3) &= \mathrm{ggT}(97, 3) = \mathrm{ggT}(94, 3) = \mathrm{ggT}(91, 3)\\ &= \mathrm{ggT}(88, 3) = \mathrm{ggT}(85, 3) = \mathrm{ggT}(82, 3)\\ &= \ldots\\ &= \mathrm{ggT}(4, 3) = \mathrm{ggT}(1, 3) = \mathrm{ggT}(3, 1)\\ &= \mathrm{ggT}(2, 1) = \mathrm{ggT}(1, 1) = \mathrm{ggT}(1, 0) = 1\end{aligned}$$

Wenn der Unterschied zwischen den beiden Operanden sehr gross ist, verbringt der Algorithmus die meiste Zeit damit, eine kleine Zahl von einer grossen Zahl zu subtrahieren, bis der erste Operand kleiner als der zweite ist.

Das Problem kann gelöst werden, indem man statt der Subtraktion $a - b$ den Divsionsrest $r = a \bmod b$ berechnet und dann den ersten Operanden a durch den zweiten Operanden und den zweiten Operanden durch den Divisionsrest ersetzt. Danach ist der erste Operand immer grösser als der zweite, so dass keine Vertauschungen mehr nötig sind.

Aufgabe 6

$$\begin{aligned}\mathrm{ggT}(54,80) &= \mathrm{ggT}(80,54) = \mathrm{ggT}(54,26) = \mathrm{ggT}(26,2)\\ &= \mathrm{ggT}(2,0) = 2\end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned}\text{klassisch: } \mathrm{ggT}(70,15) &= \mathrm{ggT}(55,15) = \mathrm{ggT}(40,15) = \mathrm{ggT}(25,15)\\ &= \mathrm{ggT}(10,15) = \mathrm{ggT}(15,10) = \mathrm{ggT}(5,10)\\ &= \mathrm{ggT}(10,5) = \mathrm{ggT}(5,5) = \mathrm{ggT}(0,5)\\ &= \mathrm{ggT}(5,0) = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{modern: } \mathrm{ggT}(70,15) &= \mathrm{ggT}(15,10) = \mathrm{ggT}(10,5) = \mathrm{ggT}(5,0)\\ &= 5\end{aligned}$$

klassisch: 11 Schritte

modern: 4 Schritte

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}\text{klassisch: } \mathrm{ggT}(34,21) &= \mathrm{ggT}(13,21) = \mathrm{ggT}(21,13)\\ &= \mathrm{ggT}(8,13) = \mathrm{ggT}(13,8)\\ &= \mathrm{ggT}(5,8) = \mathrm{ggT}(8,5)\\ &= \mathrm{ggT}(3,5) = \mathrm{ggT}(5,3)\\ &= \mathrm{ggT}(2,3) = \mathrm{ggT}(3,2)\\ &= \mathrm{ggT}(1,2) = \mathrm{ggT}(2,1)\\ &= \mathrm{ggT}(1,1) = \mathrm{ggT}(0,1)\\ &= \mathrm{ggT}(1,0) = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{modern: } \mathrm{ggT}(34,21) &= \mathrm{ggT}(21,13) = \mathrm{ggT}(13,8) = \mathrm{ggT}(8,5)\\ &= \mathrm{ggT}(5,3) = \mathrm{ggT}(3,2) = \mathrm{ggT}(2,1)\\ &= \mathrm{ggT}(1,0) = 1\end{aligned}$$

klassisch: 8 Schritte modern: 8 Schritte

34 und 21 sind zwei benachbarte Fibonacci-Zahlen.

Aufgabe 9

```
def ggt_alt(a, b):
    a, b = abs(a), abs(b)
    while b > 0:
        if a < b:
            a, b = b, a
        a = a - b
    return a
```

Aufgabe 10

```
def ggt_neu(a, b):
    a, b = abs(a), abs(b)
    while b > 0:
        a, b = b, a % b
    return a
```