Binärdarstellung von Zahlen

Übungen (L+)

24. Oktober 2022

Aufgabe 1.1

Benenne die Platzhalter in den Termen mit den richtigen Fachausdrücken.

(a) $a^b = c$

- a: Basis
- b: Exponent
- c: Potenz

(b) $\sqrt[a]{b} = c$

- a: Wurzelexponent
- b: Radikand
- c: Wurzel

(c) $\log_a b = c$

- a: Basis
- b: Numerus
- c: Logarithmus

Aufgabe 1.2

Eine Multiplikation gleicher Zahlen z. B. $2 \cdot 2 \cdot 2$ wird als 2^3 geschrieben.

Aufgabe 1.3

(a) $2^7 = 128$

(b) $2^1 = 2$

(c) $2^0 = 1$

(d) $2^{-4} = \frac{1}{32}$

(e) $2^5 = 64$

(f) $2^{10} = 1024$

Aufgabe 1.4

(a) $2^x = 512 \qquad x = 9$

(b) $2^x = 128 \qquad x = 7$

(c) $2^x = 16 \qquad x = 4$

(d) $2^x = 1 \qquad x = 0$

(e) $2^x = \frac{1}{8} \qquad x = -3$

(f) $2^x = \frac{1}{64} \qquad x = -6$

Aufgabe 1.5

(a) $\log_3 9 = 2$

(b) $\log_4 64 = 3$

(c) $\log_2 64 = 6$

(d) $\log_2 32 = 5$

(e) $\log_3 81 = 3$

(f) $\log_3 1 = 0$

Aufgabe 1.6

(a) $\sqrt[7]{128} = 2$

(b) $\sqrt[10]{1024} = 2$

(c) $\sqrt[2]{256} = 16$

(d) $\sqrt[3]{27} = 3$

(e) $\sqrt[4]{256} = 4$

(f) $\sqrt[2]{64} = 8$

Aufgabe 1.7

Bestimme den kleinsten Exponenten, der die Ungleichung erfüllt.

(a) $10^x > 555\,000 \qquad x = 6$

(b) $500 < 2^x \qquad x = 9$

(c) $4^x > 64 \qquad x = 4$

(d) $256 \leq 2^x \qquad x = 8$

Aufgabe 1.8

(a) $25 \bmod 3 = 1$

(b) $25 \bmod 5 = 0$

(c) $22 \bmod 6 = 4$

(d) $125 \bmod 7 = 6$

(e) $64 \bmod 3 = 1$

(f) $1 \bmod 5 = 1$

(g) $53\,475 \bmod 2 = 1$

(h) $47\,906 \bmod 2 = 0$

(i) $94\,371 \bmod 1000 = 371$

(j $44\,555 \bmod 3 = 0$

Aufgabe 1.9

(a) $\lceil 2.7 \rceil = 3$

(b) $\lfloor -5.0001 \rfloor = -6$

(c) $\lceil -92 \rceil = -92$

(d) $\lfloor 2^6 \rfloor = 64$

(e) $\lceil \sqrt{17} \rceil = 5$

(f) $\lfloor \sqrt{401} \rfloor = 20$

(g) $\lceil -\frac{193}{100} \rceil = -1$

(h) $\lfloor \frac{13}{2} \rfloor = 6$

(i) $\lceil \log_2 100 \rceil = 7$

(j) $\lfloor \log_2 255 \rfloor = 7$

Aufgabe 1.10

$\Sigma = \{e, n\}$.

(a) *eee*, *een*, *ene*, *enn*, *nee*, *nen*, *nne*, *nnn*

(b) $2^3 = 8$

(c) $2^6 = 64$

(d) *nennen*

Aufgabe 1.11

$\Sigma = \{e, r, t\}$.

(a) ee re te
er rr tr
et rt tt

(b) $3^2 = 9$

(c) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$

(c) *retten*, *entern*, *ernten*, ... ?

Aufgabe 1.12

$\Sigma = \{1, 3, 4, 7\}$.

(a) Zweistellige Zahlen mit Ziffern aus Σ:

- 11
- 13
- 14
- 17
- 31
- 33
- 34
- 37
- 41
- 43
- 44
- 47
- 71
- 73
- 74
- 77

Es sind $4^2 = 16$ Wörter (Zahlen).

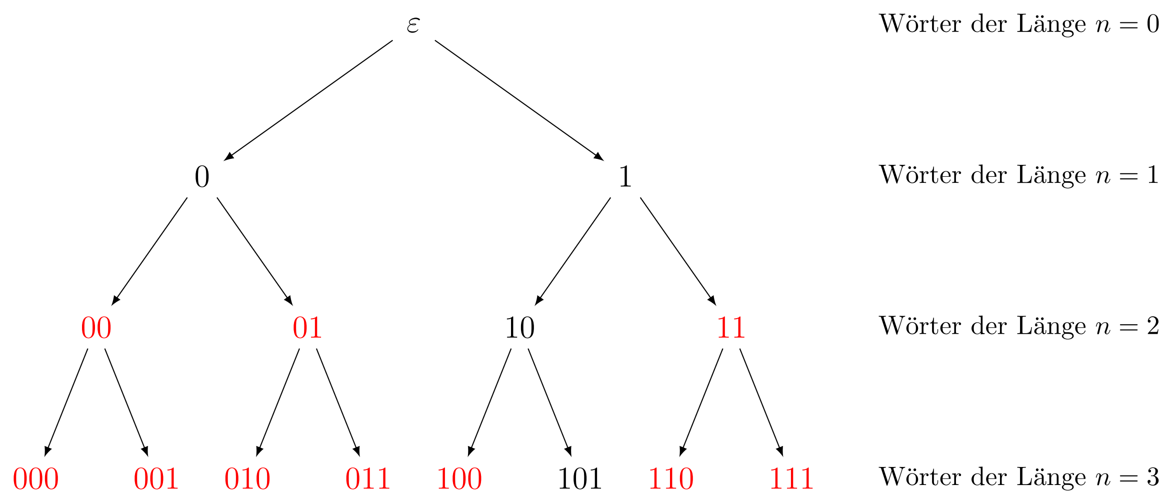
(b) Anzahl vierstelliger Zahlen mit Ziffern aus Σ:
$4^4 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) = 16 \cdot 16 = 256$

(c) Wie viele dreistellige Zahlen mit Ziffern aus Σ sind gerade, d. h. durch 2 teilbar?

Es gibt $4^3 = 64$ dreistellige Zahlen mit Ziffern aus Σ.

Weil jede der vier Ziffern an jeder Stelle gleich häufig vorkommen muss, und nur die Ziffer 4 gerade ist, gibt es 16 gerade dreistellige Zahlen mit Ziffern aus Σ.

Aufgabe 2.1



Aufgabe 2.2

$\lceil \log_2 2 \rceil = 1\,\text{Bit}$

Aufgabe 2.3

Um die die 4 Himmelsrichtungen digital zu codieren, sind mindestens 2 Bit nötig, denn 2 Bit können gerade $2^2 = 4$ Zustände codieren.

Himmelsrichtung	N	W	S	O
Binärwort	00	01	10	11

Aufgabe 2.4

Um die die 7 Wochentage digital zu codieren, sind mindestens 3 Bit nötig, denn 2 Bit können nur $2^2 = 4$ Zustände codieren aber 3 Bit schon $2^3 = 8$ Zustände.

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Binärwort	000	001	010	011	100	101	110

Aufgabe 2.5

Um die 10 Ziffern digital zu codieren, sind mindestens 4 Bit nötig, denn 3 Bit können nur $2^3 = 8$ Zustände codieren aber 4 Bit schon $2^4 = 16$ Zustände.

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Binärwort	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

Bemerkung: In diesem Beispiel (und auch in den anderen Beispielen) erfolgt die Codierung in einer „natürlichen“ Reihenfolge. Dies ist jedoch nicht vorgeschrieben. Zur Codierung der zehn Ziffern kann auch ein anderer Code mit anderen Eigenschaften verwendet werden. Der folgende Code hat beispielsweise die Eigenschaft, dass sich zwei aufeinanderfolgende Ziffern immer um jeweils ein Bit unterscheiden.

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Binärwort	0000	0001	0011	0010	0110	0111	0101	1101	1111	

Aufgabe 2.6

Es müssen 36 Karten codiert werden: $\lceil \log_2 36 \rceil = 6\,\text{Bit}$

oder mit „Raten“:	4 Bit:	$2^4 = 16$	Zustände	reicht nicht
	5 Bit:	$2^5 = 32$	Zustände	reicht nicht
	6 Bit:	$2^6 = 64$	Zustände	reicht

Aufgabe 2.7

Bei getrennter Codierung ergibt sich:

Kantonskürzel: $\lceil \log_2 26 \rceil = 5\,\text{Bit}$

sechsstellige Nummer: $\lceil \log_2 999\,999 \rceil = 20\,\text{Bit}$, denn ...

$2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024 > 10^6$ genügt sicher

$2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 = 1024 \cdot 512 < 10^6$ genügt nicht

insgesamt: 25 Bit

Hinweis: Fasst man beide Teile vor dem Codieren zusammen, erhält man ebenfalls 25 Bit:

$\lceil \log_2 (26 \cdot 999\,999) \rceil = 25\,\text{Bit}$

Aufgabe 2.8

Tag, Monat, und Jahr getrennt codieren

31 Tage:	5 Bit
12 Monate:	4 Bit
9999 Jahre:	14 Bit
Summe:	23 Bit

Aufgabe 2.9

$\left\lceil \log_2 10^{12} \right\rceil = \left\lceil \log_2 (10^3)^4 \right\rceil < \left\lceil \log_2 (2^{10})^4 \right\rceil = \left\lceil \log_2 2^{40} \right\rceil = 40$

Aufgabe 2.10

24 Bit = 8 Byte

$3000 \cdot 2000 \cdot 8\,\text{Bytes} = 6\,000\,000 \cdot 8\,\text{Bytes} = 48\,000\,000\,\text{Bytes} = 48\,\text{MB}$

Aufgabe 2.11

$$t = \frac{12.5 \cdot 10^6 \cdot 8}{10^6} = \frac{10^8}{10^6} = 10^2 = 100\,\text{Sekunden} \approx 1.6\,\text{Minuten}$$

Aufgabe 2.12

$$t = \frac{12.5 \cdot 10^6 \cdot 8}{10^8} = \frac{10^8}{10^8} = 10^0 = 1\,\text{Sekunde}$$

Aufgabe 2.13

$$t = \frac{12.5 \cdot 10^6 \cdot 8}{10^9} = \frac{10^8}{10^9} = \frac{1}{10} = 0.1\,\text{Sekunden}$$

Aufgabe 2.14

$3000 \cdot 1800\,\text{B} = 5\,400\,000\,\text{B} = 5\,400\,\text{kB} = 5.4\,\text{MB}$

Aufgabe 3.1

$$\begin{array}{rcrcrcr}
171 & : & 2 & = & 85 & \text{R} & 1 \\
85 & : & 2 & = & 42 & \text{R} & 1 \\
42 & : & 2 & = & 21 & \text{R} & 0 \\
21 & : & 2 & = & 10 & \text{R} & 1 \\
10 & : & 2 & = & 5 & \text{R} & 0 \\
5 & : & 2 & = & 2 & \text{R} & 1 \\
2 & : & 2 & = & 1 & \text{R} & 0 \\
1 & : & 2 & = & 0 & \text{R} & 1
\end{array}$$

$171_{10} = 10101011_2$

Aufgabe 3.2

$$\begin{array}{rcrcrcr}
73 & : & 2 & = & 36 & \text{R} & 1 \\
36 & : & 2 & = & 18 & \text{R} & 0 \\
18 & : & 2 & = & 9 & \text{R} & 0 \\
9 & : & 2 & = & 4 & \text{R} & 1 \\
4 & : & 2 & = & 2 & \text{R} & 0 \\
2 & : & 2 & = & 1 & \text{R} & 0 \\
1 & : & 2 & = & 0 & \text{R} & 1
\end{array}$$

$73_{10} = 1001001_2$

Aufgabe 3.3

$$\begin{array}{rcrcrcr}
198 & : & 16 & = & 12 & \text{R} & 6 \\
12 & : & 16 & = & 0 & \text{R} & 12
\end{array}$$

$198_{10} = \text{C}6_{16}$

Aufgabe 3.4

$$\begin{array}{rcrcrcr}
55 & : & 16 & = & 3 & \text{R} & 7 \\
3 & : & 16 & = & 0 & \text{R} & 3
\end{array}$$

$55_{10} = 37_{16}$

Aufgabe 3.5

$$\begin{array}{rcrcrcr}
165 & : & 8 & = & 20 & \text{R} & 5 \\
20 & : & 8 & = & 2 & \text{R} & 4 \\
2 & : & 8 & = & 0 & \text{R} & 2
\end{array}$$

$165_{10} = 245_8$

Aufgabe 3.6

$1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 200_{10}$

Aufgabe 3.7

$10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 171_{10}$

Aufgabe 3.8

<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">1</td><td colspan="4">A</td><td colspan="4">4</td><td colspan="4">D</td></tr>
</table>

$1101001001101_2 = 1A4D_{16}$

Aufgabe 3.9

<table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">3</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">7</td></tr>
</table>

$11010110111_2 = 3267_8$

Aufgabe 3.10

<table>
<tr><td colspan="4">3</td><td colspan="4">A</td><td colspan="4">7</td><td colspan="4">E</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">6</td></tr>
</table>

$3A7E_{16} = 11101001111110_2 = 35176_8$

Aufgabe 4.1

0	1000	10000	11000
1	1001	10001	11001
10	1010	10010	11010
11	1011	10011	11011
100	1100	10100	11100
101	1101	10101	11101
110	1110	10110	11110
111	1111	10111	11111

Aufgabe 4.2

$64 = 2^6 \quad \Rightarrow \quad 64 = 1000000_2$

1000000	1000100
1000001	1000101
1000010	1000110
1000011	1000111

Aufgabe 4.3

11011011
11011100
11011101
11011110
11011111
11100000
11100001

Aufgabe 4.4

$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Aufgabe 4.5

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Aufgabe 4.6

$$\begin{array}{ccccccccl} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \overline{x} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{x}+1 \end{array}$$

Aufgabe 4.7

1	0	0	1	0	1	0	1	x
0	1	1	0	1	0	1	0	$\overline{x}$
0	1	1	0	1	0	1	1	$\overline{x}+1$

Aufgabe 4.8

$67_{10} = 01000011_2$

0	1	0	0	0	0	1	1	x
1	0	1	1	1	1	0	0	$\overline{x}$
1	0	1	1	1	1	0	1	$\overline{x}+1$

Aufgabe 4.9

$82_{10} = 01010010_2$

0	1	0	1	0	0	1	0	x
1	0	1	0	1	1	0	1	$\overline{x}$
1	0	1	0	1	1	1	0	$\overline{x}+1$

Aufgabe 4.10

kleinste Zahl: $-2^6 = -64$

grösste Zahl: $2^6 - 1 = 63$

Aufgabe 4.11

kleinste Zahl: $-2^{31} = -2147483648$

grösste Zahl: $2^{31} - 1 = 2147483647$

Aufgabe 4.12

1	1	1	0	1	1	1	1	A
0	0	0	1	0	0	0	0	$\overline{A}$
0	0	0	1	0	0	0	1	$\overline{A}+1$

$10001_2 = 17_{10} \quad \Rightarrow \quad 11101111_2 = -17_{10}$

Aufgabe 4.13

1	0	0	1	0	0	0	0	A
0	1	1	0	1	1	1	1	$\overline{A}$
0	1	1	1	0	0	0	0	$\overline{A}+1$

$1110000_2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 = 112_{10} \quad \Rightarrow \quad 10010000_2 = -112_{10}$

Aufgabe 4.14

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{f}\,0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 44_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc r} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -17_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{c cccccccc r} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 44_{10} \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -17_{10} \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 27_{10} \end{array}$$

Aufgabe 4.15

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 77_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc r} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 102_{10} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -102_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{c cccccccc r} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 77_{10} \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -102_{10} \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -25_{10} \end{array}$$

Aufgabe 4.16

$$\begin{array}{cccccccc r} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 63_{10} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -63_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc r} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48_{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -48_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{c cccccccc r} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -63_{10} \\ + & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -48_{10} \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -111_{10} \end{array}$$

Aufgabe 4.17

$$\begin{array}{cccccccc r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128_{10} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -128_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{c cccccccc r} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -128_{10} \\ + & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64_{10} \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -64_{10} \end{array}$$

Aufgabe 4.18

1	1	0	1	×				1	1	0	0	1
								1	1	0	0	1
						1	1	0	0	1	0	0
					1	1	0	0	1	0	0	0
				1	0	1	0	0	0	1	0	1

Aufgabe 4.19

1	0	1	1	×			1	0	1	0	1
							1	0	1	0	1
						1	0	1	0	1	0
				1	0	1	0	1	0	0	0
				1	1	1	0	0	1	1	1

Aufgabe 4.20

kleinste Zahl: $-2^6 = -64$

grösste Zahl: $2^6 - 1 = 63$

Aufgabe 4.21

$16_{10} \times 1101_2 = 10000_2 \times 1101_2 = 11010000_2$

Aufgabe 5.1

$0.125 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 0.001_2$

Aufgabe 5.2

$5.75 = 4 + 1 + 0.5 + 0.25 = 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} = 101.11_2$

Aufgabe 5.3

$17.375 = 16 + 2 + 0.25 + 0.125 = 2^4 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} = 1001.011_2$

Aufgabe 5.4

$$\begin{array}{lllllll}
2 & \cdot & 0.03125 & = & 0 & + & 0.0625 \\
2 & \cdot & 0.0625 & = & 0 & + & 0.125 \\
2 & \cdot & 0.125 & = & 0 & + & 0.25 \\
2 & \cdot & 0.25 & = & 0 & + & 0.5 \\
2 & \cdot & 0.5 & = & 1 & + & 0
\end{array}$$

$0.03125 = 0.00001_2$

Die Binärziffern werden von oben nach unten abgelesen.

Aufgabe 5.5

$0.11_2 = 0 + 2^{-1} + 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.5 + 0.25 = 0.75$

Aufgabe 5.6

$$\begin{aligned}
101.101_2 &= 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} \\
&= 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 5 + 0.5 + 0.125 = 5.625
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.7

$$\begin{array}{lllllll}
2 & \cdot & 0.4 & = & \color{blue}{0} & + & 0.8 \\
2 & \cdot & 0.8 & = & \color{blue}{1} & + & 0.6 \\
2 & \cdot & 0.6 & = & \color{blue}{1} & + & 0.2 \\
2 & \cdot & 0.2 & = & \color{blue}{0} & + & 0.4 \\
2 & \cdot & 0.4 & = & \color{red}{0} & + & 0.8 \\
2 & \cdot & 0.8 & = & \color{red}{1} & + & 0.6 \\
2 & \cdot & 0.6 & = & \color{red}{1} & + & 0.2 \\
2 & \cdot & 0.2 & = & \color{red}{0} & + & 0.4 \\
2 & \cdot & \ldots & = & \color{blue}{\ldots} & + & \ldots
\end{array}$$

$0.4 = 0.\color{blue}{0110}\color{red}{0110}\color{black}{\ldots_2} = 0.\overline{0110}_2$

Aufgabe 5.8

$$\begin{array}{ccccccccc}
2 & \cdot & 0.35 & = & 0 & + & 0.7 \\
2 & \cdot & 0.7 & = & 1 & + & 0.4 \\
2 & \cdot & 0.4 & = & 0 & + & 0.8 \\
2 & \cdot & 0.8 & = & 1 & + & 0.6 \\
2 & \cdot & 0.6 & = & 1 & + & 0.2 \\
2 & \cdot & 0.2 & = & 0 & + & 0.4 \\
2 & \cdot & 0.4 & = & 0 & + & 0.8 \\
2 & \cdot & 0.8 & = & 1 & + & 0.6 \\
2 & \cdot & 0.6 & = & 1 & + & 0.2 \\
2 & \cdot & 0.2 & = & 0 & + & 0.4 \\
2 & \cdot & \dots & = & \dots & + & \dots
\end{array}$$

$0.35 = 0.01011001100110\ldots = 0.01\overline{0110}_2$

Achtung: Der periodische Anteil beginnt erst bei der dritten Nachkommastelle!

Aufgabe 5.9

- Vorzeichen: $-1024 < 0 \quad \Rightarrow \quad S = 1$ (*sign*)
- Binärdarstellung: $1024 = 2^{10} = 10000000000_2$
- Normalisieren: $10000000000 = 1.0_2 \cdot 2^{10} = m \cdot 2^e$
- Mantisse: $m = 1.0_2 \quad \Rightarrow \quad M = 0_2$

  (Die 1 vor dem Dezimalpunkt wird nicht gespeichert.)
- Exponent: $e = 10 \quad \Rightarrow \quad E = e + \text{bias} = 10 + 127$

  $= 137 = 128 + 8 + 1$

  $= 2^7 + 2^3 + 2^0 = 10001001_2$

  (Der verschobene Exponent E besteht aus 8 Bit.)

`S|EEEEEEEE|MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM`

`1|10001001|00000000000000000000000` (-1024 in IEEE-754)

Aufgabe 5.10

- Vorzeichen: $0.125 > 0 \quad \Rightarrow \quad S = 0$ (*sign*)
- Binärdarstellung: $0.125 = \frac{1}{8} = 2^{-3} = 0.001_2$
- Normalisieren: $0.001_2 = 1.0_2 \cdot 2^{-3} = m \cdot 2^e$
- Mantisse: $m = 1.0_2 \quad \Rightarrow \quad M = 0_2$

  (Die 1 vor dem Dezimalpunkt wird nicht gespeichert.)
- Exponent: $e = -3 \quad \Rightarrow \quad E = e + \text{bias}$

$$\begin{aligned} &= -3 + 127 = 124 \\ &= 64 + 32 + 16 + 8 + 4 \\ &= 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 \\ &= 01111100_2 \end{aligned}$$

  (Der verschobene Exponent E besteht aus 8 Bit.)

`S|EEEEEEEE|MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM`

`0|01111100|00000000000000000000000` (0.125 in IEEE-754)

Aufgabe 5.11

Vorzeichen: $S = 1$

$75 = 64 + 8 + 2 + 1 = 1001011 = 1.001011 \cdot 2^6$

Mantisse: $M = 001011$ (die führende 1 wird nicht gespeichert)

Exponent: $E = 6 + 127 = 133 = 128 + 4 + 1 = 10000101$

`1|10000101|00101100000000000000000`

Aufgabe 5.12

Vorzeichen: $S = 0$

$$\begin{array}{ccclcl} 2 & \cdot & 0.1875 & = & 0 & + & 0.375 \\ 2 & \cdot & 0.375 & = & 0 & + & 0.75 \\ 2 & \cdot & 0.75 & = & 1 & + & 0.5 \\ 2 & \cdot & 0.5 & = & 1 & + & 0 \end{array}$$

$0.1875 = 0.0011_2 = (1).1 \cdot 2^{-3}$

Mantisse: $M = 1$ (die führende 1 wird nicht gespeichert)

Exponent: $E = -3 + 127 = 124 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 = 01111100_2$

`0|01111100|10000000000000000000000`

Aufgabe 5.13

- Vorzeichenbit: $S = 1$
- Die Zahl 9 binär darstellen und normalisieren:

  $9 = 1001_2 = 1.001_2 \cdot 2^3$

  Mantisse: $M = 001$; Exponent: $e = 3$
- Den um $B = 127$ vergrösserten Exponenten binär darstellen:

  $E = e + B = 3 + 127 = 130 = 128 + 2 = 10000010_2$
- $-9 = \texttt{1|10000010|00100000000000000000000}_2$

Aufgabe 5.14

- Vorzeichenbit: $S = 0$
- Die Zahl 0.15625 binär darstellen und normalisieren:

0.15625	$\cdot$	2	=	0	Ü	0.3125
0.3125	$\cdot$	2	=	0	Ü	0.625
0.625	$\cdot$	2	=	1	Ü	0.25
0.25	$\cdot$	2	=	0	Ü	0.5
0.5	$\cdot$	2	=	1	Ü	0

  $0.15625 = 0.00101_2 = 1.01_2 \cdot 2^{-3}$

  Mantisse: $M = (1.)01_2$;
- $E = e + B = -3 + 127 = 124 = 127 - 2 - 1 = 01111100_2$
- $0.15625 = \texttt{0|01111100|01000000000000000000000}_2$

Aufgabe 5.15

- Vorzeichenbit: $S = 0$
- 3.8 binär darstellen und normalisieren:

  ganzzahliger Anteil: $3 = 11_2$

  gebrochener Anteil:
  $$\begin{array}{lllllll} 0.8 & \cdot & 2 & = & 1 & \text{Ü} & 0.6 \\ 0.6 & \cdot & 2 & = & 1 & \text{Ü} & 0.2 \\ 0.2 & \cdot & 2 & = & 0 & \text{Ü} & 0.4 \\ 0.4 & \cdot & 2 & = & 0 & \text{Ü} & 0.8 \\ 0.8 & \cdot & 2 & = & 1 & \text{Ü} & 0.6 \\ \ldots \end{array}$$

  $3.8 = 11.\overline{1100}_2 = 1.1\overline{1100}_2 \cdot 2^1$

  $M \approx 11100110011001100110011_2$
- $E = e + B = 1 + 127 = 128 = 10000000_2$
- $3.8 \approx \texttt{0|10000000|11100110011001100110011}_2$

Aufgabe 5.16

- Vorzeichen: $S = 1$ (negative Zahl)
- Exponent: $E = 10000001_2 = 129$

  $e = E - B = 129 - 127 = 2$
- Mantisse $M = (1.)1001_2$

  $1.1001_2 \cdot 2^2 = 110.01_2 = 4 + 2 + 0.25 = 6.25$
- $\texttt{1|10000001|10010000000000000000000}_2 = -6.25$

Aufgabe 5.17

- Vorzeichen: -1
- Exponent:
  $e = E - B = 10000110_2 - 127 = 128 + 4 + 2 - 127 = 7$
- $$\begin{aligned}(1.)11010101 \cdot 2^7 &= 11101010.1 \\ &= 128 + 64 + 32 + 8 + 2 + 0.5 = 234.5\end{aligned}$$
- $v = -234.5$

Aufgabe 5.18

- Vorzeichen: $S = 0$ (positiv)
- Exponent:

  $$\begin{aligned} e &= E - B = 10000011_2 - 127 \\ &= 128 + 2 + 1 - 127 = 131 - 127 = 4 \end{aligned}$$

- $(1.)10010010000000000000000 \cdot 2^4 \quad = 11001.001$
  $= 16 + 8 + 1 + 0.125 = 25.125$
- $v = 25.125$

Aufgabe 5.19

`1|11111111|00000000000000000000000`

Aufgabe 5.20

Es handelt sich um eine NaN (not a number), da alle Exponentenbits 1 sind und die Mantisse nicht null ist.

Aufgabe 5.21

`0|10000010|11100000000000000000000`

Durch Multiplikation mit 2 wird der Exponent um 1 erhöht:

`0|10000011|11100000000000000000000`

Aufgabe 5.22

Vorzeichen: $8 > 0 \quad \Rightarrow \quad S = 0$

Binärdarstellung: $8 = 1000_2$

Normalform: $1000_2 = 1.0_2 \cdot 2^3$

Exponent: $E = 3 + 127 = 128 + 2 = 10000010_2$

Mantisse: $M = (1.)0_2$

IEEE 754-Darstellung von 8.0: `0|10000010|00000000000000000000000`

Aufgabe 5.23

Vorzeichen: $S = 1$

$75 = 64 + 8 + 2 + 1 = 1001011 = 1.001011 \cdot 2^6$

Mantisse: $M = 001011$ (die führende 1 wird nicht gespeichert)

Exponent: $E = 6 + 127 = 133 = 128 + 4 + 1 = 10000101$

`1|10000101|00101100000000000000000`

Aufgabe 5.24

Vorzeichen: $S = 0$

$$
\begin{array}{ccclcl}
2 & \cdot & 0.1875 & = & 0 & + & 0.375 \\
2 & \cdot & 0.375 & = & 0 & + & 0.75 \\
2 & \cdot & 0.75 & = & 1 & + & 0.5 \\
2 & \cdot & 0.5 & = & 1 & + & 0
\end{array}
$$

$0.1875 = 0.0011_2 = (1).1 \cdot 2^{-3}$

Mantisse: $M = 1$ (die führende 1 wird nicht gespeichert)

Exponent: $E = -3 + 127 = 124 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 = 01111100_2$

`0|01111100|10000000000000000000000`

Aufgabe 5.25

Vorzeichen: $-25 < 0 \quad \Rightarrow \quad S = 1$

Binärdarstellung: $25 = 16 + 8 + 1 = 11001_2$

Normalform: $11001_2 = 1.1001_2 \cdot 2^4$

Exponent: $E = 4 + 127 = 128 + 3 = 10000011_2$

Mantisse: $M = (1.)1001_2$

IEEE 754-Darstellung von -25.0: `1|10000011|10010000000000000000000`

Aufgabe 5.26

Vorzeichen: $13.75 > 0 \quad \Rightarrow \quad S = 0$

Binärdarstellung: $13.75 = 8 + 4 + 1 + 0.5 + 0.25 = 1101.11_2$

Normalisieren: $1101.11_2 = 1.10111_2 \cdot 2^3$

Exponent: $E = 3 + 127 = 128 + 2 = 10000010_2$

Mantisse: $M = (1.)10111_2$

IEEE 754-Darstellung von 13.75: `0|10000010|10111000000000000000000`

Aufgabe 5.27

Vorzeichen: $-0.375 < 0 \quad \Rightarrow \quad S = 1$

Binärdarstellung:
$$\begin{array}{lllllll} 2 & \cdot & 0.375 & = & 0 & + & 0.75 \\ 2 & \cdot & 0.75 & = & 1 & + & 0.5 \\ 2 & \cdot & 0.5 & = & 1 & + & 0 \end{array}$$

$0.375 = 0.011_2$

Normalisieren: $0.011_2 = 1.1_2 \cdot 2^{-2}$

Exponent: $E = -2 + 127 = 127 - 2 = 01111101_2$

Mantisse: $M = (1.)1_2$

IEEE 754-Darstellung von -0.375: `1|01111101|10000000000000000000000`

Aufgabe 5.28

`0|10000011|01000000000000000000000`

$S = +1$

$E = 10000011 = 128 + 2 + 1 = 131 \quad \Rightarrow \quad e = 131 - 127 = 4$

$M = 010\ldots \quad \Rightarrow \quad m = 1.01$

Normalform: $+1.01 \cdot 2^4 = 10100 = 16 + 4 = +20.0$

Aufgabe 5.29

`1|01111100|00000000000000000000000`

$S = -1$

$E = 01111100 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 = 124 \quad \Rightarrow \quad e = 124 - 127 = -3$

$M = 00\ldots \quad \Rightarrow \quad m = 1.0$

Normalform: $-1.0 \cdot 2^{-3} = 0.001 = \frac{1}{8} = -0.125$

Aufgabe 5.30

(a) `0|11111111|00000000000000000000001` $=$ `NaN`

(b) `1|00000000|00000000000000000000000` $= -0 = 0$

(c) `1|11111111|00000000000000000000000` $= -\infty$

Aufgabe 5.31

- $a =$ `0|01011110|00000000000000000000001`
- $b =$ `1|11011110|00100000000000000000000`
- $c =$ `0|00111110|00000000000000000000010`
- $d =$ `1|00000000|00000000000000000000000`
- $e =$ `1|11011111|00000100000000000000000`

x und y sind zwei Zahlen in Normalform $m \cdot 2^e$, mit $0 < m \leq 1$ und $e \in \mathbb{Z}$.

- Ist der Exponent von x grösser als der von y, dann ist x grösser als y.
- Sind die Exponenten von x und y gleich gross und die Mantisse von x grösser als die von y, dann ist x grösser als y.
- Sind zwei Zahlen negativ, dann vergleich man sie wie positive Zahlen und ersetzt $<$ durch $>$ bzw. $>$ durch $<$.
- Haben zwei Zahlen unterschiedliches Vorzeichen, dann ist die negative Zahl kleiner als die positive.

$\Rightarrow \quad e < b < d < c < a$