
Vektorgeometrie (II)

Lösungen+

Version vom 16. Februar 2022

Aufgabe 5.1

$$-\frac{4}{3}\vec{a} = \begin{pmatrix} 28 \\ -32 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

Aufgabe 5.3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

Aufgabe 5.4

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot 0.5 = 20$$

Aufgabe 5.5

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 4.5 \cdot 2.1 \cdot \cos 90^\circ = 4.5 \cdot 2.1 \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 5.6

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 11 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 11 \cdot 6 \cdot \frac{-1}{2} = -33$$

Aufgabe 5.7

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 9 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = 18 \cdot (-1) = -18$$

Aufgabe 5.8

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{-4}{4 \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^\circ$$

Aufgabe 5.9

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{6\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$$

Aufgabe 5.10

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{0}{5 \cdot 2} = \arccos 0 = 90^\circ$$

Aufgabe 5.11

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 1$$

$$\varphi = \arccos 1 = 0^\circ$$

Aufgabe 5.12

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = 120^\circ$$

Aufgabe 5.13

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2$$

Aufgabe 5.14

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\stackrel{(*)}{=} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

(*) wegen $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Aufgabe 5.15

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 5$$

Aufgabe 5.16

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = (-7) \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 0$$

Aufgabe 5.17

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 15 - 16 + 4 = 3$$

Aufgabe 5.18

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 16 + 1 + 9 = 26$$

Aufgabe 5.19

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 7 + 0 - 15 + 8 = 0$$

Aufgabe 5.20

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = 60.26^\circ$$

Aufgabe 5.21

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \arccos \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = 60^\circ \end{aligned}$$

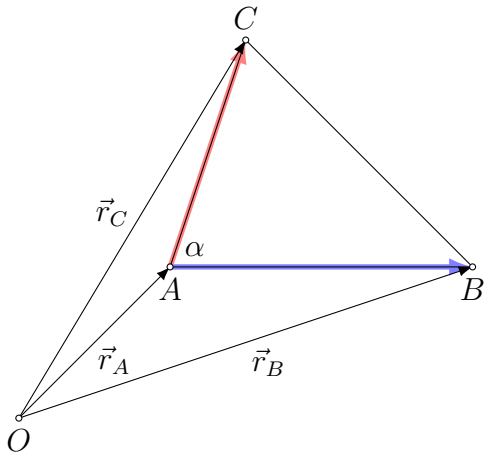
Aufgabe 5.22

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{70} \cdot \sqrt{14}} = 90^\circ$$

Aufgabe 5.23

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{-84}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{126}} = 180^\circ$$

Aufgabe 5.24



$$\vec{AB} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = -\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{78}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{78}} = 30^\circ$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \arccos \frac{26}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{104}} = 60^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$$

Aufgabe 5.25

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{39}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{117}} = 30^\circ$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \arccos \frac{-13}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{26}} = 108.43^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 26.57^\circ$$

Aufgabe 5.26

$$\cos 90^\circ = \frac{12 + 2z}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{26 + z^2}}$$

$$0 = 12 + 2z$$

$$z = -6$$

Aufgabe 5.27

$$\cos 90^\circ = \frac{t^2 - 7t + 12}{\sqrt{t^2 + 58} \cdot \sqrt{2t^2 + 16}}$$

$$0 = (t - 3)(t - 4)$$

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = 4$$

Aufgabe 5.28

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + 2z}{\sqrt{1 + z^2} \cdot 3}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + z^2} \cdot 3 = 2 + 4z$$

$$18(1 + z^2) = (2 + 4z)^2$$

$$18 + 18z^2 = 4 + 16z + 16z^2$$

$$2z^2 - 16z + 14 = 0$$

$$z^2 - 8z + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - 1)(z - 7) = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 7$$

Aufgabe 5.29

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{-1 + z}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + z^2}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + z^2} = 2z - 2$$

$$2(2 + z^2) = (2z - 2)^2$$

$$4 + 2z^2 = 4z^2 - 8z + 4$$

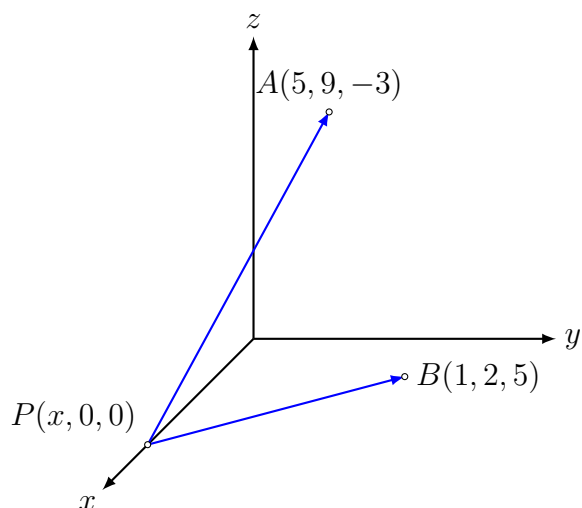
$$0 = 2z^2 - 8z$$

$$0 = 2z(z - 4)$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 4$$

Aufgabe 5.30



$$\vec{PA} = \vec{r}_A - \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PB} = \vec{r}_B - \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$$

$$(5-x)(1-x) + 18 - 16 = 0$$

$$5 - 6x + x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow P_1(2, 0, 0)$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow P_1(4, 0, 0)$$

Aufgabe 5.31

$$P(0, y, 0), \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -y \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7-y \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

$$-30 - y(7-y) + 36 = 0$$

$$y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$(y-1)(y-6) = 0$$

$$y_1 = 1 \Rightarrow P_1(0, 1, 0)$$

$$y_2 = 6 \Rightarrow P_2(0, 6, 0)$$

Aufgabe 5.32

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 8\vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 8|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 8|\vec{b}|^2 - (3|\vec{b}|)^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{b}|^2$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-|\vec{b}|^2}{3|\vec{b}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{3}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109.47^\circ$$

Aufgabe 5.33

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.34

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.35

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot (-6) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 - 0 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.36

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.37

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.38

$$A = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 12 \text{ FE}$$

Aufgabe 5.39

$$A = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 7 \text{ FE}$$

Aufgabe 5.40

$$A = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \text{ FE}$$

Aufgabe 5.41

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Aufgabe 5.42

$$\frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13.5$$

Aufgabe 5.43

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind kollinear.}$$

Aufgabe 5.44

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind nicht kollinear.}$$

Aufgabe 5.45

eine Zahl

Aufgabe 5.46

nicht definiert

Aufgabe 5.47

eine Zahl

Aufgabe 5.48

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 41$$

$$V_{\text{Spat}} = |41| = 41$$

Aufgabe 5.49

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -15$$

$$V_{\text{Spat}} = |-15| = 15$$

Aufgabe 5.50

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -24$$

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$

Aufgabe 5.51

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig.

Aufgabe 5.52

$$|[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}| = 213$$

$$\left| \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 213$$

$$\left| \begin{pmatrix} 18 - y \\ 1 \\ 2y - 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 213$$

$$|126 - 7y + 4 - 6y + 135| = 213$$

$$|265 - 13y| = 213$$

$$265 - 13y = 213 \Rightarrow y_1 = 4$$

$$265 - 13y = -213 \Rightarrow y_2 = 478/13$$

Aufgabe 6.1

$$\text{Richtungsvektor: } \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.2

Koordinaten von P in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} 14 &= -1 + 3t & 15 &= 3t & t &= 5 \\ 11 &= 21 - 2t \Rightarrow -10 = -2t \Rightarrow t = 5 & \Rightarrow P &\notin g \\ 7 &= 12 + t & -5 &= t & t &= -5 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.3

Einfach den Anfangspunkt von g auswechseln:

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.4

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.5

Schnittpunkt mit z -Achse $B(0, 0, 7)$ liegt auf g :

$$\vec{v} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.6

$$\text{Richtungsvektor: } \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.7

$$\text{Mittelpunkt: } \vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M(1, -4, 4)$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.8

Schwerpunkt: $S(4, 1, 1)$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.9

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 87 \\ 58 \\ -87 \end{pmatrix} = 29 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$h_c: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.10

$$\begin{array}{l} -2 = 2 + 2t \quad t = -2 \\ \bullet \quad -1 = 3 + 2t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow P \in g \\ \quad \quad 7 = 1 - 3t \quad t = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 = 2 + 2t \quad t = 3 \\ \bullet \quad 9 = 3 + 2t \Rightarrow t = 3 \Rightarrow Q \notin g \\ \quad \quad 8 = 1 - 3t \quad t = -7/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
4 = 2 + 2t & & t = 1 \\
\bullet \quad 5 = 3 + 2t & \Rightarrow & t = 1 \quad \Rightarrow \quad R \in g \\
-2 = 1 - 3t & & t = 1
\end{array}$$

Aufgabe 6.11

- (a) g ist parallel zur x -Achse.
- (b) g geht durch den Ursprung.
- (c) g ist parallel zur xz -Ebene (π_3).

Aufgabe 6.12

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.13

$S_1(3, 1, 0)$, S_2 existiert nicht, $S_3(3, 0, 2)$

Aufgabe 6.14

$$t_1 = \frac{3}{8} = \frac{105}{280}$$

$$t_2 = \frac{1}{5} = \frac{56}{280}$$

$$t_3 = \frac{5}{7} = \frac{200}{280}$$

$$t_2 < t_1 < t_3$$

S_1 teilt die Strecke zwischen S_2 und S_3 im Verhältnis 49 : 95.

Aufgabe 6.15

- \vec{v}_h und \vec{v}_g sind kollinear ($\vec{v}_h = -3\vec{v}_g$)
- $A_g(5, 2, -2) \in h$

Die Geraden g und h sind identisch. ($g = h$)

Aufgabe 6.16

- \vec{v}_h und \vec{v}_g sind kollinear ($\vec{v}_h = 2\vec{v}_g$)
- $A_g(-2|0|-2) \notin h$

Die Geraden g und h sind parallel. ($g \parallel h$)

Aufgabe 6.17

- \vec{v}_h und \vec{v}_g sind nicht kollinear
- Das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat genau eine Lösung: $s = -3, t = 2$.

Die Geraden schneiden sich

Aufgabe 6.18

- \vec{v}_h und \vec{v}_g sind nicht kollinear
- das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat keine Lösung.

g und h sind windschief

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2s = 2 - t & 2s + t = -3 & \\ 5 + s = 2 + t & \Rightarrow s - t = -3 & \Rightarrow s = -2 \\ 2s = -5 + t & 2s - t = -5 & t = 1 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(1, 3, -4)$

Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{1}{3\sqrt{3}} = 78.90^\circ$$

Aufgabe 6.20

Schnittpunkt $g \cap h$:

$$\begin{array}{rcl} -3 + 3s = -16 + 8t & 3s - 8t = -13 & \\ 5 - 5s = -6 + 3t & \Rightarrow -5s - 3t = -11 & \Rightarrow s = 1 \\ -2 + 9s = 9 - t & 9s + t = 11 & t = 2 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(0, 0, 7)$

spitzer Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{74}} = 90^\circ$$

Aufgabe 6.21

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_1(-1, 3, 0)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T_2(2, 1, 2)$$

Aufgabe 6.22

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-2, 0, 1)$$

$$d(P, g) = |\vec{r}_F - \vec{r}_P| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = 7$$

Aufgabe 6.23

$$\vec{v}_g \times \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$d(g, h) = \frac{|(\vec{v}_g \times \vec{v}_h) \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}_g \times \vec{v}_h|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{490}{49} = 10$$

Aufgabe 6.24

Schnittpunkt: $S(5, 8, 1)$

$$w_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$w_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.25

Der Richtungsvektor \vec{v}_h des Lots steht senkrecht auf dem Richtungsvektor \vec{v}_g und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_h = \vec{v}_g \times (\vec{v}_g \times \overrightarrow{AP}) = \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.26

Durch die Projektion auf die xy -Ebene werden alle z -Komponenten zu Null.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.27

$$P(6 - 3t, -8 + 4t, 3 + t) \in g$$

$$|\overrightarrow{QP}| = 3$$

$$\left| \begin{pmatrix} 6 - 3t \\ -8 + 4t \\ 3 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$\left| \begin{pmatrix} 5 - 3t \\ -6 + 4t \\ t \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2 = 9$$

$$25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 = 9$$

$$26t^2 - 78t + 52 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t - 1)(t - 2) = 0$$

$$t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(3, -4, 4)$$

$$t_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 0, 5)$$

Aufgabe 6.28

$$(a) \Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 26 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow C(39, 26, 6)$$

$$(c) \quad |\overrightarrow{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\sqrt{(-6 + 3t)^2 + (-4 + 2t)^2 + (-9 + t)^2} = 7 \quad \|\ ^2$$

$$36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 = 49$$

$$133 - 70t + 14t^2 = 49$$

$$14t^2 - 70t + 84 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

nach $t = 2$ und $t = 3$ Sekunden

Aufgabe 7.1

$$(a) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -4$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = -4$$

$$\varepsilon: x - 4 = 0$$

$$(b) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 14$$

$$\varepsilon: x - 2y + 14 = 0$$

$$(c) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -20$$

$$\varepsilon: 4x - y + z - 20 = 0$$

$$(d) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -11$$

$$\varepsilon: 5x + 4y + 2z - 11 = 0$$

Aufgabe 7.2

$$(a) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -2$$

$$\varepsilon: 2x + 2y + z - 2 = 0$$

$$(b) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 47 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -47 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -50$$

$$\varepsilon: 2x - 22y - 47z - 50 = 0$$

Aufgabe 7.3

$$(a) \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1$$

$$\varepsilon: 3x + 4y - 5z + 1 = 0$$

$$(b) \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -5$$

$$\varepsilon: 9x + 5y + 2z - 5 = 0$$

Aufgabe 7.4

$$(a) \text{ Parallel zur } xy\text{-Ebene: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 6$$

$$\varepsilon: z + 6 = 0$$

$$(b) \text{ Parallel zur } xz\text{-Ebene: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = -9$$

$$\varepsilon: y - 9 = 0$$

Aufgabe 7.5

$A(2, 0, 1)$, $B(1, 2, 0)$, $C(1, 1, 2)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -7$$

$$3x + 2y + z - 7 = 0$$

Aufgabe 7.6

$$(a) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 5$$

$$\varepsilon: x + y + 3z + 5 = 0$$

$$(b) \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}; d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -23$$

$$\varepsilon: 2x + 7y + 5z - 23 = 0$$

Aufgabe 7.7

(a) Die Geraden schneiden sich offensichtlich im Punkt $S(1, 4, 8)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -8$$

$$\varepsilon: z - 8 = 0$$

$$(b) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \cap h \neq \{\}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 10$$

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 10 = 0$$

$$(c) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \cap h \neq \{\}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 16$$

$$\varepsilon: 8x + 12y - 3z - 16 = 0$$

Aufgabe 7.8

$$(a) \quad \varepsilon: 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zweitprojizierend (senkrecht zur yz -Ebene)

$$(b) \quad \varepsilon: x + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erstprojizierend (senkrecht zur xy -Ebene)

$$(c) \quad \varepsilon: 2x + 3z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

drittprojizierend (senkrecht zur xz -Ebene)

$$(d) \quad \varepsilon: x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zweite Hauptebene (parallel zur yz -Ebene)

$$(e) \quad z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erste Hauptebene (parallel zur xy -Ebene)

$$(f) \quad \varepsilon: y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

xz -Ebene

Aufgabe 7.9

$$(a) \quad a = 3, b = -2, c = 6$$

$$(b) \quad b = -4, c = 3$$

$$(c) \quad a = -2.5, b = -2, c = 5$$

$$(d) \quad a = b = c = 0$$

Aufgabe 7.10

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_a = - \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -abc$$

$$\varepsilon: bcx + acy + abz - abc = 0 \quad || : abc$$

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0 \quad (\text{Achsenabschnittsform})$$

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

Fehlt ein Achsenabschnitt, so kann man ihn rechnerisch mit ∞ berücksichtigen.

$$(a) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 3x + 3y + 2z - 6 = 0$$

$$(b) \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{\infty} - \frac{z}{7} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 7x - 3z - 21 = 0$$

$$(c) \quad \frac{x}{1} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 4x - y + 2z - 4 = 0$$

(d) Bei Ebenen, die durch den Ursprung gehen, d. h. $d = 0$ gilt, ist die Achsenabschnittsform nicht definiert.

Aufgabe 7.12

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\varepsilon: 7x - 3y - 5z - 25 = 0$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = 139$$

$$\varepsilon: 5x + 18y - 4z + 139 = 0$$

Aufgabe 7.13

$$(a) \varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$$

Setze $x = s$ und $y = t$: $5s - 2t + z - 6 = 0$

Damit lassen sich x , y und z durch s und t darstellen:

$$x = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t$$

$$y = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t$$

$$z = 6 - 5 \cdot s + 2 \cdot t$$

und somit:

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \varepsilon: 4y - z + 7 = 0$$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 7 + 4t$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \varepsilon: 2x + 4y - 6z + 1 = 0$$

Setze $y = s$ und $z = t$: $x = -0.5 - 2y + 3t$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder setze $x = s$ und $y = t$: $z = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

und mit viel Kosmetik:

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) $\varepsilon: 3z - 5 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 5/3$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$

x -Achsenabschnitt: $A(x, 0, 0)$: $x - 6 = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

y -Achsenabschnitt: $B(0, y, 0)$: $-3y - 6 = 0 \Rightarrow B(0, -2, 0)$

z -Achsenabschnitt: $C(0, 0, z)$: $2z - 6 = 0 \Rightarrow C(0, 0, 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}: s_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}: s_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}: s_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$

- 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

$$x = t: y = 5 \Rightarrow s_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2. Spur ($x = 0$): $-3y + 5z - 15 = 0$

$$z = t: y = -5 + \frac{5}{3}t \Rightarrow s_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 3. Spur ($y = 0$): $5z - 15 = 0$

$$x = t: z = 3 \Rightarrow s_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.15

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 &= 0 \\ 15 + 4 - 30 + 11 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$1 = -s + 4t \quad (1)$$

$$2 = 2s - 4t \quad (2)$$

$$3 = 2s - 3t \quad (3)$$

aus (1) und (2) folgt $s = 3$ und $t = 1$

Einsetzen in (3) ergibt: $0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$

Aufgabe 7.16

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$$

$$\text{(a)} \quad P(0, 0, z) \in \varepsilon:$$

$$z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad P(0, 0, 4)$$

$$\text{(b)} \quad P(t, t, t) \in \varepsilon:$$

$$3t - 2t + t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2, 2, 2)$$

$$\text{(c)} \quad P(1, -5, z) \in \varepsilon$$

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -9 \quad \Rightarrow \quad P(1, -5, -9)$$

$$\text{(d)} \quad P(2, y, 4) \in \varepsilon$$

$$3 \cdot 2 - 2y + 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad P(2, 3, 4)$$

Aufgabe 7.17

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Punkte liegen nicht in einer Ebene.

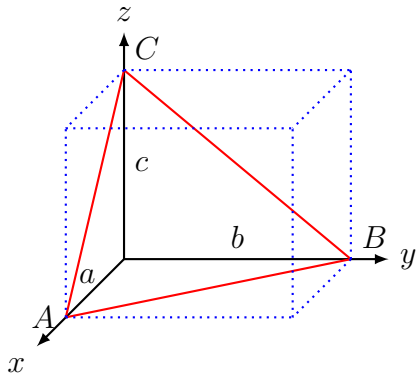
Aufgabe 7.18

$$3x - 2y + z = 8$$

$$x + y - 3z = -4 \quad \Rightarrow \quad S(4, 4, 4)$$

$$4x + 3y - 5z = 8$$

Aufgabe 7.19



Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad a = 16$$

$$B(0, b, 0) \quad \Rightarrow \quad b = 9$$

$$C(0, 0, c) \quad \Rightarrow \quad c = 144/p$$

Sind a , b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

$$V = \frac{1}{6}|abc|$$

$$384 = \frac{1}{6} \left| 16 \cdot 9 \cdot \frac{144}{p} \right|$$

$$384 \cdot |p| = 8 \cdot 3 \cdot 144$$

$$|p| = 9$$

$$p = \pm 9$$

Aufgabe 7.20

- (a) $\varepsilon: 2y - z - 1 = 0$ Ebene parallel zur x -Achse
- (b) $\varepsilon: 5x - 2y + 7z = 0$ Ebene durch den Ursprung
- (c) $\varepsilon: y = 4 - x$ Ebene parallel zur z -Achse
- (d) $\varepsilon: z = 3$ Ebene parallel zur xy -Ebene

Aufgabe 7.21

- (a) $t_0 = 1, S(4, -6, 7)$
- (b) $g \parallel \varepsilon$
- (c) $t_0 = 4, S(41, 31, -40)$
- (d) $g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.22

(a) $1 + 2t = 9 - 7r + 5s$
 $1 + t = 2 + 4r - 8s$
 $3 - t = 6 + 6r + 2s$

$$\begin{array}{rcl} 2t + 7r - 5s = 8 & & t = 5 \\ t - 4r + 8s = 1 & \Rightarrow & r = -1 \\ -t - 6r - 2s = 3 & & s = -1 \end{array}$$

$t = 5$ in g einsetzen: $S(11, 6, -2)$

(b) $5 + 6t = 8 + 2r + 5s$
 $7 + 8t = -4 - 4r + 5s$
 $1 + 7t = 5 + 7r + 7s$

$$\begin{array}{rcl} 6t - 2r - 5s = 3 & \Rightarrow & \text{keine Lösung} \\ 8t + 4r - 5s = -11 & & \\ 7t - 7r - 7s = 4 & & \end{array}$$

$g \parallel \varepsilon$

(c) $1 + 6t = 3 + 0r + 4s$
 $0 - 9t = 5 + 3r - 5s$
 $7 + 8t = -1 - 4r + 4s$

$$\begin{array}{rcl} 6t + 0r - 4s = 2 & & \\ -9t - 3r + 5s = 5 & \Rightarrow & \text{unendliche viele Lösungen} \\ 8t + 4r - 4s = -8 & & \end{array}$$

$g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.23

$$(a) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y + 5z + 5 = 0$$

$$6x + 4y + 9z - 7 = 0 \Rightarrow P(-11, 7, 5)$$

$$x + 3y - 2z + 0 = 0$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x + y + 3 = 0$$

$$5x + 8y + 3z - 3 = 0 \Rightarrow P(-4, 1, 5)$$

$$x - y + z + 0 = 0$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.24

$$(a) 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -4$$

$$\delta: 2x - 3y + 5z - 4 = 0;$$

$$(b) 7 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 8 \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow d = 15$$

$$\delta: 7x + 2y - 8z + 15 = 0;$$

Aufgabe 7.25

$$(a) \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 9 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

$$\delta: x + 3y - z + 1 = 0$$

$$(b) 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$\delta: 2x - y - 3 = 0$$

Aufgabe 7.26

$$(a) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -32$$

$$\mu: 2x - 6y + 3z - 32 = 0$$

$$(b) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -11$$

$$\mu: 7y - z - 11 = 0$$

Aufgabe 7.27

$$(a) M_{AB} = (1, 3, -3); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -17$$

$$\mu: 2x + y - 4z - 17 = 0 \text{ (Mittelnormalebene)}$$

$$\mu \cap g: 2(3+t) + (-2-t) - 4(2+2t) - 17 = 0$$

$$-21 - 7t = 0$$

$$t = -3$$

$$P(0, 1, -4)$$

$$(b) M_{AB} = (1, 4, 1); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\mu: 2x - y - 2z + 4 = 0$$

$$\mu \cap g: 2(-1-t) - (4+2t) - 2(5+t) + 4 = 0$$

$$-12 - 6t = 0$$

$$t = -2$$

$$P(-2, -16, -10)$$

Aufgabe 7.28

$$(a) \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -(-3 + 12) = -9$$

$$\delta: 3x - 4y - 10z + 9 = 0$$

Aufgabe 7.28

$$(b) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

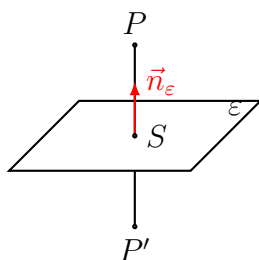
$$\vec{PQ} \times \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 51$$

$$\delta: 29x - 38y - 7z - 51 = 0$$

Aufgabe 7.29

Lösungsidee: Lege eine zu ε normale Gerade durch P , schneide sie mit ε und verdopple den Wert des Parameters t , um direkt vom Punkt P zum Punkt P' zu gelangen.



$$(a) \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 4(0 + 4t) - 3(4 - 3t) + (-5 + t) + 4 = 0$$
$$26t - 13 = 0$$
$$t = 0.5$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(4, 1, -4)$$

$$(b) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 1 \cdot (4 + t) - 2 \cdot (-2t) + 3 \cdot (-2 + 3t) - 5 = 0$$
$$-7 + 14t = 0$$
$$t = 0.5$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(5, -2, 1)$$

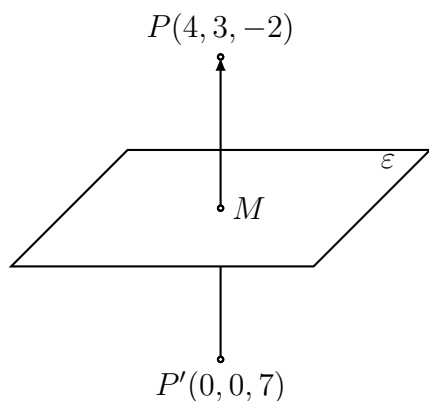
$$(c) \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 3 \cdot (-1 + 3t) - 8 \cdot (17 - 8t) - 7 = 0$$
$$-146 + 73t = 0$$
$$t = 2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(11, -6, -15)$$

Aufgabe 7.30

Lösungsidee: Wenn P und P' Spiegelpunkte sind, so ist die Spiegelebene gerade die Mittelnormalebene.



$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: 4x + 3y - 9z + d = 0$$

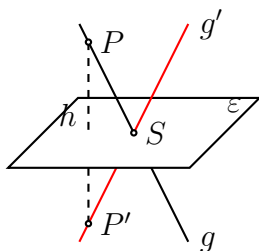
Mittelpunkt der Strecke PP' : $M(2, 1.5, 2.5) \in \varepsilon$

$$d_\varepsilon = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = -(8 + 4.5 - 22.5) = 10$$

$$\varepsilon: 4x + 3y - 9z + 10 = 0$$

Aufgabe 7.31

Lösungsidee: Wähle einen Punkt $P \in g$ mit $P \notin \varepsilon$ und spiegle ihn an der Ebene ε . Die Gerade g' durch den Spiegelpunkt P' und den Schnittpunkt $g \cap \varepsilon = S$ ist die gesuchte gespiegelte Gerade g' .



$$(a) P(7, -2, 4) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} h \cap \varepsilon: 4(7 + 4t) + 2(-2 + 2t) - (4 - t) + 1 &= 0 \\ 21 + 21t &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$$t' = -2 \text{ in } h \text{ einsetzen: } P'(-1, -6, 6)$$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon: 4(7 + 2t) + 2(-2) - (4 + t) + 1 &= 0 \\ 7t + 21 &= 0 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(1, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{SP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 &= 0 \\ 42 + 14t &= 0 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

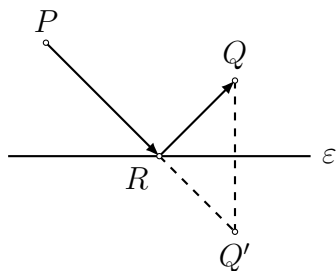
$$t' = -6 \text{ in } h \text{ einsetzen: } P'(-7, 17, 13)$$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-2) - 2(1 + 3t) + 42 &= 0 \\ 42 - 21t &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(-7, 7, 7)$$

$$\overrightarrow{SP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.32



- Q an ε spiegeln $\rightarrow Q'$
- $(PQ') \cap \varepsilon \rightarrow R$

oder (nicht eingezeichnet):

- P an ε spiegeln $\rightarrow P'$
- $(P'Q) \cap \varepsilon \rightarrow R$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 5(7 + 5t) - 2(-1 - 2t) + 3(8 + 3t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

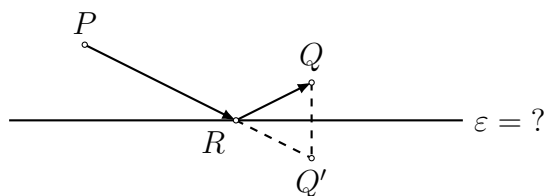
$$t' = 2 \cdot (-1) \text{ in } h \text{ einsetzen: } \Rightarrow Q'(-3, 3, 2)$$

$$g(PQ'): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 5(7 - 5t) - 2(-7 + 5t) + 3(4 - t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$$R(2, -2, 3)$$

Aufgabe 7.33



- Q' bestimmen.
- ε ist die Mittelnormalebene von Q und Q' .

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{PR}|} \cdot \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{Q'} &= \vec{r}_R + \frac{|\overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{PR}|} \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{38}}{3\sqrt{38}} \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(-1, -3, 14) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4\vec{n}$$

$$M_{QQ'}(1, 5, 8)$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 3$$

$$\varepsilon: x + 4y - 3z + 3 = 0$$

Aufgabe 7.34

(a) $\vec{n}_\varepsilon = (5, -1, -6)^T$, $\vec{n}_\delta = (4, 0, 1)^T$

$$\begin{aligned}\sphericalangle(\varepsilon, \delta) &= \sphericalangle(\vec{n}_\varepsilon, \vec{n}_\delta) \\ &= \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|} \\ &= \arccos \frac{|5 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + (-6) \cdot 1|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 6^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \arccos \frac{14}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{17}} = 64.45^\circ\end{aligned}$$

(b) $\vec{n}_\varepsilon = (3, -2, 5)^T$

Einen Normalenvektor von δ erhält man über das Kreuzprodukt des Richtungsvektors \vec{v} von g und einem weiteren Richtungsvektor dieser Ebene, nämlich dem Vektor zwischen dem Punkt P und dem Punkt $A(2, 2, 1)$ der Geraden g .

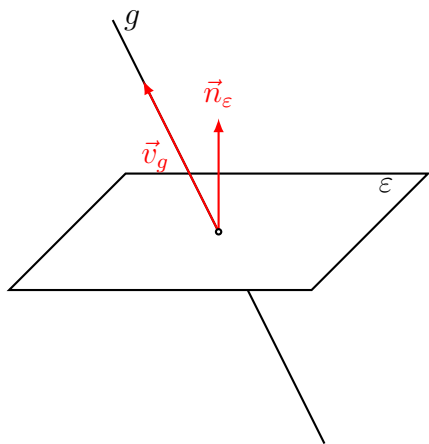
$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -14 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$\begin{aligned}\sphericalangle(\varepsilon, \delta) &= \sphericalangle(\vec{n}_\varepsilon, \vec{n}_\delta) = \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|} \\ &= \arccos \frac{35}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{374}} = 72.93^\circ\end{aligned}$$

(c) $\sphericalangle(\varepsilon, \delta) = \dots = 48.00^\circ$

Aufgabe 7.35

Lösungsidee: Berechne den spitzen Schnittwinkel φ' zwischen einem Richtungsvektor \vec{v}_g der Geraden g und einem Normalenvektor \vec{n}_ε der Ebene ε und ergänze diesen Winkel auf 90° .



(a) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = (2, 1, -2)^T$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = (3, -4, 0)^T$

$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \arccos \frac{|6 - 4 + 0|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \sqrt{9 + 16}}$$

$$= \arccos \frac{2}{15} = 82.34^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - 82.34^\circ = 7.66^\circ$$

oder direkt: $\sphericalangle(g, \varepsilon) = \arcsin \frac{2}{15} = 7.66^\circ$

(b) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

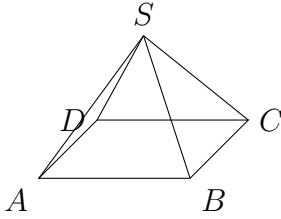
$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \arccos \frac{|6 - 5 - 1|}{\sqrt{9 + 1 + 1} \sqrt{4 + 25 + 1}}$$

$$= \arccos \frac{0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{30}} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

geometrische Deutung: $g \parallel \varepsilon$

Aufgabe 7.38



(a) $\vec{AB} = (-6, -3, -6)^T$, $\vec{BC} = (6, y + 1, z + 5)^T$

$$|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$$

$$\sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{36 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2}$$

$$81 = 36 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 10z + 25$$

$$0 = y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 \quad (1)$$

$$\vec{AB} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$-36 - 3y - 3 - 6z - 30 = 0$$

$$y = -2z - 23 \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen:

$$y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$(-2z - 23)^2 + 2(-2z - 23) + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$4z^2 + 92z + 529 - 4z - 46 + z^2 + 10z + 53 = 0$$

$$5z^2 + 98z + 464 = 0$$

$$z_1 = -8 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -7 \quad \Rightarrow \quad C_1(3, -7, -8)$$

$$z_2 = -11.6 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \text{nicht ganzzahlig}$$

(b) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{G} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 324}{9 \cdot 9} = 12$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -54 \\ 54 \end{pmatrix}; \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5.5 \\ -11.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_1(7, 5.5, -11.5)$$

$$\vec{r}_{S_2} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_2(-1, -10.5, 4.5)$$

Aufgabe 7.39

$$(a) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{45}{9} = 5$$

$$(b) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|6 \cdot 7 - 9 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 7|}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2}} = \frac{77}{11} = 7$$

$$(c) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|15 \cdot (-4) + 8 \cdot 0 - 8|}{\sqrt{15^2 + 8^2 + 0^2}} = \frac{68}{17} = 4$$

Aufgabe 7.40

- Gleichung der Ebene durch BCD :

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 2x + 2y + z - 6 = 0$$

Höhe der Pyramide = Abstand des Punktes A von ε :

$$h = d(A, \varepsilon) \stackrel{\text{HNF}}{=} \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{6}{3} = 2$$

- Seitenkante $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \vec{n}) = \arccos \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot 3} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = 26.57^\circ$$

$$\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, BCD) = 90^\circ - 26.57^\circ = 63.43^\circ$$

Aufgabe 7.41

Wird eine Ebene $\varepsilon: ax + by + cz + d = 0$ um h Einheiten parallel entlang ihres Normalenvektors verschoben, so bedeutet dies für die HNF der verschobenen Ebene δ und einen beliebigen Punkt P :

$$\begin{aligned}\text{dist}(P, \delta) &= \text{dist}(P, \varepsilon) \pm h \\ &= \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \pm h \\ &= \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \pm \frac{h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{ax + by + cz + d \pm h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

Also muss $\pm h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ zur Ebenengleichung von ε addiert werden, um die Ebenengleichung von δ zu erhalten.

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\delta_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0$$

$$\delta_2: 11x - 2y + 10z - 6 = 0$$

(b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0, d = 4$

$$4\sqrt{24^2 + 0^2 + 7^2} = 4 \cdot \sqrt{625} = 4 \cdot 25 = 100$$

$$\delta_1: 24x - 7z + 105 = 0$$

$$\delta_2: 24x - 7z - 95 = 0$$

(c) $\varepsilon: 9x + 12y + 8z - 6 = 0, d = 2$

$$2\sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2} = 2 \cdot \sqrt{289} = 2 \cdot 17 = 34$$

$$\delta_1: 9x + 12y + 8z + 28 = 0$$

$$\delta_2: 9x + 12y + 8z - 40 = 0$$

Aufgabe 7.42

$$(a) \quad \frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$
$$\frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{6} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{3} \quad || \cdot 6$$

$$|4x - 2y - 4z + 3| = |2x + 4y - 4z + 10|$$

$$4x - 2y - 4z + 3 = 2x + 4y - 4z + 10$$

$$\omega_1: 2x - 6y - 7 = 0$$

$$4x - 2y - 4z + 3 = -(2x + 4y - 4z + 10)$$

$$\omega_2: 6x + 2y - 8z + 13 = 0$$

$$(b) \quad \frac{|6x + 6y + 17z - 2|}{\sqrt{36 + 36 + 289}} = \frac{|15x - 10y - 6z + 9|}{\sqrt{225 + 100 + 36}}$$
$$\frac{|6x + 6y + 17z - 2|}{19} = \frac{|15x - 10y - 6z + 9|}{19} \quad || \cdot 19$$

$$|6x + 6y + 17z - 2| = |15x - 10y - 6z + 9|$$

$$6x + 6y + 17z - 2 = 15x - 10y - 6z + 9$$

$$\omega_1: 9x - 16y - 23z + 11 = 0$$

$$6x + 6y + 17z - 2 = -(15x - 10y - 6z + 9)$$

$$\omega_2: 21x - 4y + 11z + 7 = 0$$

$$(c) \quad \omega_1: 10x - 23y + 11z - 35 = 0$$

$$\omega_2: 10x + y - 7z + 13 = 0$$

$$(d) \quad \omega_1: x + 110y + 11z + 20 = 0$$

$$\omega_2: 55x + 2y - 25z - 160 = 0$$

Aufgabe 7.43

$$(a) \frac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4x + 3z + 7|}{\sqrt{16 + 9}}$$
$$\frac{|3x - 4y + 2|}{5} = \frac{|4x + 3z + 7|}{5} \quad || \cdot 5$$

$$|3x - 4y + 2| = |4x + 3z + 7|$$

$$3x - 4y + 2 = \pm(4x + 3z + 7)$$

$$\omega_1: x + 4y + 3z + 5 = 0$$

$$\omega_2: 7x - 4y + 3z + 9 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$1(0 + t) + 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 5 = 0$$

$$t + 4 - 4t + 6 + 5 = 0$$

$$-3t + 15 = 0$$

$$t = 5$$

$$P_1 = (5, -4, 2)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$7(0 + t) - 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 9 = 0$$

$$7t - 4 + 4t + 6 + 9 = 0$$

$$11t + 11 = 0$$

$$t = -1$$

$$P_2 = (-1, 2, 2)$$

$$(b) \frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{\sqrt{196 + 49 + 484}} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{\sqrt{16 + 49 + 16}}$$

$$\frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{27} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{9} \quad || \cdot 27$$

$$|14x - 7y - 22z + 38| = |12x + 21y - 12z + 6|$$

$$14x - 7y - 22z + 38 = \pm(12x + 21y - 12z + 6)$$

$$\omega_1: 2x - 28y - 10z + 32 = 0$$

$$\omega_2: 26x + 14y - 34z + 44 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$t = -2$$

$$P_1 = (0, -1, 6)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$26(6 + 3t) + 14(3 + 2t) - 34(2 - 2t) + 44 = 0$$

$$174t + 174 = 0$$

$$t = -1$$

$$P_2 = (3, 1, 4)$$

Aufgabe 7.44

$$\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0?$$

$$(a) d = \frac{3 - 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 144 + 144}} = \frac{34}{17} = 2$$

$$(b) \pi_1: z = 0$$

$$\text{dist}(Q, \varepsilon) = \text{dist}(Q, \pi_1)$$

$$\frac{x - 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 7}{17} = \pm \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1}}$$

$$x + 7 = \pm 17$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 24$$

Aufgabe 8.1

(a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 16$

(b) $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 5$

Aufgabe 8.2

(a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$

Kugel mit Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$ und Radius $\varrho = 5$

(b)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z &= -12 \\ (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 4)^2 - 16 &= -12 \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 &= 9 = 3^2 \end{aligned}$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(1, -2, 4)$ und Radius $\varrho = 3$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 2y + 4z = 25$

keine Kugel (wegen $-z^2$)

(d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$

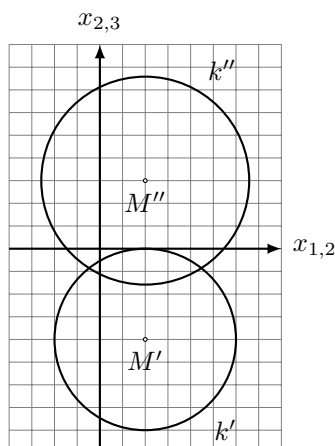
$$\left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{12}{36} + \frac{3}{36}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ und Radius $\varrho = \sqrt{\frac{5}{12}}$

Aufgabe 8.3

Darstellung der Kugel in der DG-Zweitafelprojektion:



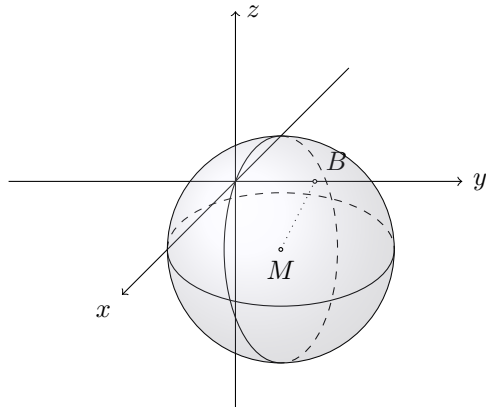
In der Grundrissebene gilt $z = 0$.

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 25$$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Kreis in π_1 mit $M(4, 2, 0)$ und $\varrho = 4$

Aufgabe 8.4



$$\overrightarrow{MB} = \vec{r}_B - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varrho^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 9 + 36 + 16 = 61$$

$$K: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 61$$

Schnittpunkte mit der x -Achse:

$$g_x: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K \cap g_x: (x - 3)^2 + (0 - 1)^2 + (0 + 4)^2 = 61$$

$$(x - 3)^2 + 1 + 16 = 61$$

$$(x - 3)^2 = 44$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{44}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{44}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{44}$$

$$A_1(3 + \sqrt{44}, 0, 0), A_2(3 - \sqrt{44}, 0, 0)$$

Schnittpunkte mit der y -Achse:

$$g_y: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K \cap g_y: (0-3)^2 + (y-1)^2 + (0+4)^2 &= 61 \\
9 + (y-1)^2 + 16 &= 61 \\
(y-1)^2 &= 36 \\
y-1 &= \pm 6 \\
y_1 &= 1+6 = 7 \\
y_2 &= 1-6 = -5
\end{aligned}$$

$$B_1(0, 7, 0), B_2(0, -5, 0)$$

Schnittpunkte mit der z -Achse:

$$g_z: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K \cap g_z: (0-3)^2 + (0-1)^2 + (z+4)^2 &= 61 \\
9 + 1 + (z+4)^2 &= 61 \\
(z+4)^2 &= 51 \\
z+4 &= \pm\sqrt{51} \\
z_1 &= -4 + \sqrt{51} \\
z_2 &= -4 - \sqrt{51}
\end{aligned}$$

$$C_1(0, 0, -4 + \sqrt{51}), C_2(0, 0, -4 - \sqrt{51})$$

Aufgabe 8.5

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad &([-4+t]-1)^2 + ([4-t]-2)^2 + ([3-2t]+1)^2 = 9 \\
&(t-5)^2 + (-t+2)^2 + (-2t+4)^2 = 9 \\
&6t^2 - 30t + 45 = 9 \\
&6t^2 - 30t + 36 = 0 \\
&t^2 - 5t + 6 = 0 \\
&(t-2)(t-3) = 0 \\
&t_1 = 2 \\
&t_2 = 3
\end{aligned}$$

$$P_1(-2, 2-1), P_2(-1, 1, -3)$$

Aufgabe 8.5

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad &(8+0)^2 + (0+t)^2 + (5-2t)^2 = 49 \\
&64 + t^2 + 25 - 20t + 4t^2 = 49 \\
&5t^2 - 20t + 40 = 0 \\
&t^2 - 4t + 8 = 0 \\
&D = -16 < 0 \quad \text{keine Lösung}
\end{aligned}$$

Die Gerade meidet die Kugel.

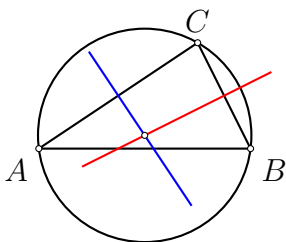
Aufgabe 8.5

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & ([4+t] - 4)^2 + ([8+2t] - 5)^2 + ([7+2t] - 1)^2 = 9 \\ & t^2 + (2t+3)^2 + (2t+6)^2 = 9 \\ & 9t^2 + 36t + 45 = 9 \\ & 9t^2 + 36t + 36 = 0 \\ & t^2 + 4t + 4 = 0 \\ & (t+2)^2 = 0 \\ & t = -2 \end{aligned}$$

Berührungspunkt: $P(2, 4, 3)$

Aufgabe 8.6

Die Lösung erfolgt analog zur Bestimmung des Umkreismittelpunkts im Dreieck: Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke hat denselben Abstand von den beiden Endpunkten. Somit hat der Schnittpunkt von zwei (der drei) Mittelsenkrechten im Dreieck den gleichen Abstand von allen drei Ecken.



Beim Tetraeder gibt es vier Kanten, wobei drei Mittelnormalebenen genügen, um ihren Schnittpunkt zu bestimmen.

Bestimme drei Mittelnormalebenen und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, M_{AB}(6, 3, -1); \mu_{AB}: 2x - 4y - 4z - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_{AC}(3.5, 6, 1.5); \mu_{AC}: -3x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, M_{AD}(2.5, 3, 4.5); \mu_{AD}: -5x - 4y + 7z - 7 = 0$$

$$\mu_{AB} \cap \mu_{AC} \cap \mu_{AD}:$$

$$2x - 4y - 4z = 4$$

$$-3x + 2y + z = 3 \quad \Rightarrow \quad S(-2, -1, -1)$$

$$-5x - 4y + 7z = 7$$

Aufgabe 8.7

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = 49 + 16 + 16 = 81 = \varrho^2 \text{ (ok)}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -76$$

$$\tau: 7x + 4y - 4z - 76 = 0$$

Aufgabe 8.8

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (0, 0, 1)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (10, 0, 0)^T = 3^2 \quad (3)$$

Aus (2) folgt $z = 0$

Aus (3) folgt $10x = 9$ und $x = 9/10$

Einsetzen in (1):

$$\frac{81}{100} + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{900 - 81}{100} = \frac{9}{100} \cdot 91 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{10} \sqrt{91}$$

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 3/10 \cdot \sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ \pm \sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \vec{n}$$

$$d = -\vec{r}_B \cdot \vec{r}_A = -30$$

$$3x \pm \sqrt{91} y - 30 = 0$$

Aufgabe 8.9

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (2, 3, -10)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (3, 4, -5)^T = 3^2 \quad (3)$$

$$2x + 3y - 10z = 0 \quad (2)$$

$$3x + 4y - 5z = 9 \quad (3)$$

$$(3) - (2): x + y + 5z = 9 \Rightarrow x = 9 - y - 5z \quad (4)$$

$$x \text{ aus (2) und (3) eliminieren: } y = 20z - 18 \quad (5)$$

$$(5) \text{ in (4) einsetzen: } x = 9 - (20z - 18) - 5z = 27 - 25z \quad (6)$$

(5), (6) in (1) einsetzen:

$$(27 - 25z)^2 + (20z - 18)^2 + z^2 = 9$$

$$1026z^2 - 2070z + 1044 = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 58/57$$

z_1, z_2 in (5) und (6) einsetzen:

$$y_1 = 20z_1 - 18 = 2$$

$$y_2 = 20z_2 - 18 = 134/57$$

$$x_1 = 27 - 25z_1 = 2$$

$$x_2 = 27 - 25z_2 = 89/57$$

$$\vec{n}_1 = (2, 2, 1)^T, \vec{n}_2 = (89, 134, 58)^T$$

$$A(3, 4, -5) \in \tau_{1,2}:$$

$$d_1 = -\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_A = -9$$

$$d_2 = -\vec{n}_2 \cdot \vec{r}_A = -513$$

$$\tau_1: 2x + 2y + z - 9 = 0$$

$$\tau_2: 89x + 134y + 58z - 513 = 0$$

Aufgabe 8.10

Richtungsvektoren von g = Normalenvektoren von τ

$$\text{Schnittpunkte von } K \text{ mit } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

$$9t^2 + 4t^2 + t^2 = 25$$

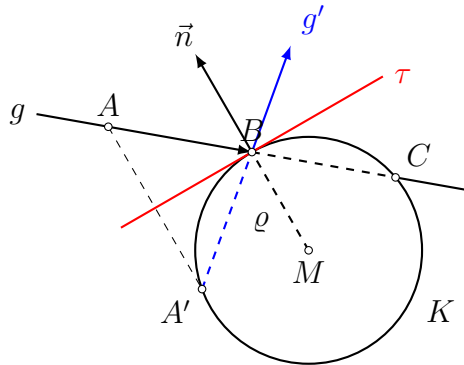
$$14t^2 = 25 \Rightarrow t = \pm 5/\sqrt{14}$$

$$\text{Berührungspunkte: } \vec{r}_B = \pm \frac{5}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d_{1,2} = -\vec{n} \cdot \vec{r}_B = \pm 5\sqrt{14}$$

$$\tau_1: 3x + 2y + z + 5\sqrt{14} = 0$$

$$\tau_2: 3x + 2y + z - 5\sqrt{14} = 0$$

Aufgabe 8.11



$$K: (x - 8)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 50$$

$$g \cap K: [x = -3 + t, y = -2, z = -4 + t]$$

$$(-3 + t - 8)^2 + (-2 - 3)^2 + (-4 + t - 2)^2 = 50$$

$$(t - 11)^2 + (-5)^2 + (t - 6)^2 = 50$$

$$t^2 - 22t + 121 + 25 + t^2 - 12t + 36 = 50$$

$$2t^2 - 34t + 132 = 0$$

$$t^2 - 17t + 66 = 0$$

$$(t - 6)(t - 11) = 0$$

$$t_1 = 6$$

$$t_2 = 11$$

$B(3, -2, 2)$ (der zweite Schnittpunkt C ist weiter entfernt)

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_B = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\tau: x + y - 1 = 0$$

$A(-3, -2, -4)$ an τ spiegeln:

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(-3+t) + (-2+t) - 1 &= 0 \\
-3+t-2+t-1 &= 0 \\
2t-6 &= 0 \\
t_0 &= 3
\end{aligned}$$

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + 2 \cdot t_0 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A'(3, 4, -4)$$

$$\overrightarrow{A'B} = \vec{r}_B - \vec{r}_{A'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung des reflektierten Lichtstrahls:

$$g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.12

$$K_1: (x-1)^2 + (y-13)^2 + (z-18)^2 = 49$$

$$K_2: (x+1)^2 + (y-13)^2 + (z-14)^2 = 9$$

$$K_1: x^2 - 2x + 1 + y^2 - 26y + 169 + z^2 - 36z + 324 - 49 = 0$$

$$K_2: x^2 + 2x + 1 + y^2 - 26y + 169 + z^2 - 28z + 196 - 9 = 0$$

$$K_1 - K_2: -4x - 8z + 88 = 0 \quad || : -4$$

$$\varepsilon: x + 2z - 22 = 0$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \cap g: (1+t) + 2(18+2t) - 22 = 0$$

$$5t + 15 = 0$$

$$t = -3$$

Mittelpunkt des Schnittkreises: $M(-2, 13, 12)$

$$d_1 = \overline{M_1M} = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$\text{Radius des Schnittkreises: } r = \sqrt{\varrho_1^2 - d_1^2} = \sqrt{49 - 45} = \sqrt{4} = 2$$