Vektorgeometrie (II)

Übungen

Version vom 16. Februar 2022

Aufgabe 5.1

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -21 \\ 24 \\ 15 \end{pmatrix}$

Gesucht: $-\frac{4}{3}\vec{a}$

Aufgabe 5.2

Gegeben: $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 30°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.3

Gegeben: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 45°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.4

Gegeben: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.5

Gegeben: $|\vec{a}| = 4.5$, $|\vec{b}| = 2.1$, $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.6

Gegeben: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 6$, $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 120°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.7

Gegeben: $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180°$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.8

Gegeben: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Aufgabe 5.9

Gegeben: $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{3}$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Aufgabe 5.10

Gegeben: $|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 2,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Aufgabe 5.11

Für welchen Winkel $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

Aufgabe 5.12

Für welchen Winkel $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

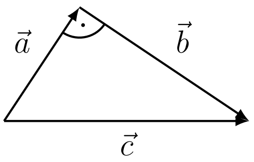
Aufgabe 5.13

Zeige, dass für das Skalarprodukt gilt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Aufgabe 5.14

Beweise den Satz von Pythagoras mit Hilfe des Skalarprodukts.

Hinweis: Verwende die folgende Figur und $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.



Aufgabe 5.15

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.16

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.17

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.18

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.19

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.20

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.21

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.22

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.23

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.24

Gegeben: $A(-9, 6, 6)$, $B(-3, 14, 8)$, $C(-7, 13, 11)$

Gesucht: alle Innenwinkel des Dreiecks ABC

Aufgabe 5.25

Gegeben: $A(2, 6, 3)$, $B(6, 9, 4)$, $C(4, 14, 10)$

Gesucht: alle Innenwinkel des Dreiecks ABC

Aufgabe 5.26

Bestimme die fehlende Koordinate, so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$ einen rechten Winkel einschliessen.

Aufgabe 5.27

Bestimme die fehlende Koordinate t, so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 4 \end{pmatrix}$ einen rechten Winkel einschliessen.

Aufgabe 5.28

Bestimme die fehlende Koordinate z, so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ einen Winkel von $45°$ einschliessen.

Aufgabe 5.29

Für welche Werte von z schliessen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$ einen Winkel von $60°$ ein?

Aufgabe 5.30

Gegeben: $A(5, 9, -3)$, $B(1, 2, 5)$

Gesucht: Punkt P auf der x-Achse mit $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$

Aufgabe 5.31

Gegeben: $A(6, 0, 4)$, $B(-5, 7, 9)$

Gesucht: Punkt P auf der y-Achse mit $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$

Aufgabe 5.32

Berechne den Winkel zwischen $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b}$, wenn gilt: $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ und $\big(\vec{a}-2\vec{b}\big)\cdot\big(\vec{a}+4\vec{b}\big) = 0$.

Aufgabe 5.33

Berechne $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.34

Berechne $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.35

Berechne $\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.36

Berechne $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.37

Berechne $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.38

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.39

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.40

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.41

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Dreiecks.

Aufgabe 5.42

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Dreiecks.

Aufgabe 5.43

Untersuche mit Hilfe des Vektorproduktes, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgabe 5.44

Untersuche mit Hilfe des Vektorproduktes, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgabe 5.45

Ist der Wert von $\left(\alpha \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.46

Ist der Wert von $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.47

Ist der Wert von $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.48

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spates.

Aufgabe 5.49

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spates.

Aufgabe 5.50

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Tetraeders.

Aufgabe 5.51

Untersuche mit Hilfe des Spatprodukts, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ linear (un-)abhängig sind.

Aufgabe 5.52

Für welche Werte von y spannen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ einen Spat mit dem Volumen von 213 auf?

Aufgabe 6.1

Bestimme eine Gleichung der Geraden g, die durch $A(2, 1, 3)$ und $B(5, 2, 7)$ geht.

Aufgabe 6.2

Liegt der Punkt $P(14, 11, 7)$ auf der Geraden mit der Gleichung

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 6.3

Gib eine Gleichung der Geraden h an, die parallel zur Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

verläuft und durch den Punkt $Q(8, 9, 4)$ geht.

Aufgabe 6.4

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $A(5, 2, 3)$ geht und parallel zur y-Achse verläuft.

Aufgabe 6.5

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $A(3, -4, 1)$ geht und die z-Achse bei $z = 7$ schneidet.

Aufgabe 6.6

Bestimme eine möglichst einfache Parametergleichung der Geraden, die durch die Punkte $A(5, 0, -3)$ und $B(-1, 4, 7)$ geht.

Aufgabe 6.7

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die parallel zur x-Achse verläuft und durch den Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten $A(-4, 1, 5)$ und $B(6, -9, 3)$ geht.

Aufgabe 6.8

Bestimme eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P(-2, 1, 0)$ und den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $A(1, 1, -7)$, $B(6, 4, 2)$, $C(5, -2, 8)$ geht.

Aufgabe 6.9

Bestimme eine möglichst einfache Gleichung der Geraden, welche die Höhe h_c des Dreiecks mit den Ecken $A(1,1,-3)$, $B(3,4,1)$ und $C(0,2,4)$ enthält.

Aufgabe 6.10

Welche der Punkte $P(-2,-1,7)$, $Q(8,9,8)$ und $R(4,5,-2)$ liegen auf der Geraden

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 6.11

Welche spezielle Lage hat die Gerade?

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 6.12

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(7,6,3)$ geht und parallel zur Geraden $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Aufgabe 6.13

Bestimme alle Spurpunkte der Geraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.14

Im welchen Verhältnis teilt der mittlere der drei Spurpunkte der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

die Verbindungsstrecke zwischen den äusseren beiden Spurpunkten?

Aufgabe 6.15

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.16

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.17

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.18

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.19

Zeige, dass sich die Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 6.20

Zeige, dass sich die Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

scheiden und bestimme den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 6.21

Die Strecke mit den Endpunkten $A(-4, 5, -2)$ und $B(5, -1, 4)$ ist in drei gleiche Teile zu zerlegen. Ermittle die Koordinaten der Teilungspunkte.

Aufgabe 6.22

Bestimme den Abstand des Punktes $P(0, 3, 7)$ von der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und den Fusspunkt F des Lots von P auf g.

Aufgabe 6.23

Bestimme den Abstand der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.24

Zeige, dass sich die beiden Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

schneiden und bestimme die Gleichungen ihrer Winkelhalbierenden.

Aufgabe 6.25

Bestimme eine Gleichung der Geraden h, die orthogonal zur Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht und durch den Punkt $P(5, 8, 1)$ geht.

Aufgabe 6.26

Bestimme die Gleichung der Normalprojektion der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

auf die xy-Ebene.

Aufgabe 6.27

Welche Punkte auf der Geraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben vom Punkt $Q(1, -2, 3)$ den Abstand $d = 3$?

Aufgabe 6.28

Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig durch den Raum. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich im Punkt $A(-6, -4, -9)$ und 10 Sekunden später im Punkt $B(24, 16, 1)$.

(a) Gib eine Parametergleichung der Bahn an?

(b) Wo befindet sich der Körper zur Zeit $t = 15\,\mathrm{s}$?

(c) Wann hat der Körper vom Ursprung eine Entfernung von $7\,\mathrm{m}$?

(Es gilt $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1\,\mathrm{m}$.)

Aufgabe 7.1

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Punkte A, B und C enthält.

(a) $A(4, 0, 8)$, $B(4, -5, 9)$, $C(4, 0, 2)$

(b) $A(4, 9, 2)$, $B(-6, 4, 4)$, $C(-2, 6, 3)$

(c) $A(3, -8, 0)$, $B(8, 4, -8)$, $C(4, -1, 3)$

(d) $A(-5, 7, 4)$, $B(3, -2, 2)$, $C(3, 0, -2)$

Aufgabe 7.2

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g gegeben ist.

(a) $P(3, -2, 0)$ $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $(3, -2, 0)$, $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.3

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die parallelen Geraden g und h definiert ist.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.4

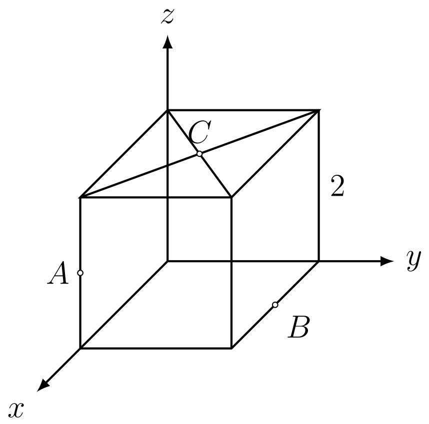
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene,

(a) die parallel zur xy-Ebene ist und den Punkt $P(5,3,-6)$ enthält.

(a) die parallel zur xz-Ebene ist und den Punkt $P(7,9,1)$ enthält.

Aufgabe 7.5

Im unten dargestellten Würfel sind A und B Kantenmittelpunkte. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ABC?



Aufgabe 7.6

Bestimme die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zum Vektor $\vec{v}$ steht und durch den Punkt P geht.

(a) $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, $P(2,8,-5)$

(b) $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$, $P(4,0,3)$

Aufgabe 7.7

Zeige, dass sich die beiden Geraden schneiden und bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch g und h aufgespannt wird.

(a) $g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$, $h\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$

(b) $g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}$, $h\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$

(c) $g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$, $h\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.8

Beschreibe die spezielle Lage der Ebene.

(a) $\varepsilon\colon z = 2y - 1$

(b) $\varepsilon\colon y = -x + 4$

(c) $\varepsilon\colon 2x + 3z - 4 = 0$

(d) $\varepsilon\colon x = 3$

(e) $\varepsilon\colon z = -1$

(f) $\varepsilon\colon y = 0$

Aufgabe 7.9

Berechne die Achsenabschnitte der Ebene.

(a) $\varepsilon\colon 2x - 3y + z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 3y - 4z + 12 = 0$

(c) $\varepsilon\colon 4x + 5y - 2z + 10 = 0$

(d) $\varepsilon\colon x - 4y + 3z = 0$

Aufgabe 7.10

Berechne formal eine Ebenengleichung aus den Achsenabschnitten $x = a$, $y = b$ und $z = c$ und dividiere das Ergebnis durch abc.

Aufgabe 7.11

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch ihre Achsenabschnitte gegeben ist.

(a) $a = 2,\ b = 2,\ c = 3$

(b) $a = 3,\ c = -7$

(c) $a = 1,\ b = -4,\ c = 2$

(d) $a = b = c = 0$

Aufgabe 7.12

Stelle die Gleichung der Ebene in der Koordinatenform dar.

(a) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.13

Stelle die Gleichung der Ebene in der Parameterform dar.

(a) $\varepsilon\colon 5x - 2y + z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 4y - z + 7 = 0$

(c) $\varepsilon\colon 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

(d) $\varepsilon\colon 3z - 5 = 0$

Aufgabe 7.14

Bestimme die Parametergleichungen der Spuren der Ebene.

(a) $\varepsilon\colon x - 3y + 2z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 3y + 5z - 15 = 0$

Aufgabe 7.15

Liegt der Punkt P in der Ebene ε?

(a) $\varepsilon\colon 3x - 2y - 5z + 11 = 0$; $P(5, -2, 6)$

(b) $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $P(2, 4, 1)$

Aufgabe 7.16

In der Ebene $\varepsilon\colon 3x - 2y + z - 4 = 0$ ist ein Punkt P zu bestimmen,

(a) der auf der z-Achse liegt,

(b) der drei gleiche Koordinaten hat,

(c) der den Grundriss $P'(1, -5, 0)$ besitzt,

(d) der den Seitenriss $P'''(2, 0, 4)$ besitzt,

Aufgabe 7.17

Ist das Viereck $ABCD$ mit $A(3, -1, 2)$ $B(4, 0, 1)$ $C(1, 5, 3)$ und $D(-2, 0, 6)$ eben oder nicht?

Aufgabe 7.18

Bestimme den Schnittpunkt der drei Ebenen.

- $\varepsilon_1 \colon 3x - 2y + z - 8 = 0$
- $\varepsilon_2 \colon x + y - 3z + 4 = 0$
- $\varepsilon_3 \colon 4x + 3y - 5z - 8 = 0$

Aufgabe 7.19

Die Ebene $\varepsilon \colon 9x + 16y + pz - 144 = 0$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A, B und C. Bestimme p, so dass die Pyramide $OABC$ mit dem Koordinatenursprung O als vierte Ecke, das Volumen $V = 384$ besitzt.

Aufgabe 7.20

Beschreibe die besondere Lage der Ebenen im $\mathbb{R}^3$.

(a) $\varepsilon \colon 2y - z - 1 = 0$

(b) $\varepsilon \colon 5x - 2y + 7z = 0$

(c) $\varepsilon \colon y = 4 - x$

(d) $\varepsilon \colon z = 3$

Aufgabe 7.21

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene ε.

(a) $g \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\varepsilon \colon 3x + 8y + 4z + 8 = 0$

(b) $g \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\varepsilon \colon -3x + 7y + 9z - 5 = 0$

(c) $g \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\varepsilon \colon 9x - 4y + 6z - 5 = 0$

(d) $g \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\varepsilon \colon x + 4y - 2z - 2 = 0$

Aufgabe 7.22

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene E.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

(c) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.23

Bestimme eine Parametergleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

(a) $\varepsilon_1\colon 4x + 2y + 5z + 5 = 0$; $\varepsilon_2\colon 6x + 4y + 9z - 7 = 0$

(b) $\varepsilon_1\colon x + y + 3 = 0$; $\varepsilon_2\colon 5x + 8y + 3z - 3 = 0$

Aufgabe 7.24

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ, die parallel zur Ebene ε ist und durch den Punkt P geht.

(a) $\varepsilon\colon 2x - 3y + 5z + 4 = 0$; $P(1, 1, 1)$

(b) $\varepsilon\colon 7x + 2y - 8z + 9 = 0$; $P(3, -2, 4)$

Aufgabe 7.25

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ, die senkrecht zur Gerade g ist und durch den Punkt P geht.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $P(5, 1, 9)$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P(4, 0, -5)$

Aufgabe 7.26

Bestimme eine Gleichung der Mittelnormalebene der Strecke AB.

(a) $A(2,4,1)$, $B(6,-8,7)$

(b) $A(5,-5,4)$, $B(5,9,2)$

Aufgabe 7.27

Welcher Punkt auf der Geraden g hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand?

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A(-1,2,1)$, $B(3,4,-7)$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A(-3,6,5)$, $B(5,2,-3)$

Aufgabe 7.28

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die Punkte P und Q geht und normal zur Ebene ε steht.

(a) $P(1,3,0)$, $Q(3,2,1)$; $\varepsilon\colon 4x+3y-2=0$

(b) $P(2,0,1)$, $Q(-3,-4,2)$; $\varepsilon\colon 3x+y+7z-2=0$

Aufgabe 7.29

Der Punkt P wird an der Ebene ε gespiegelt. Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes P'.

(a) $P(0,4,-5)$, $\varepsilon\colon 4x-3y+z+4=0$

(b) $P(4,0,-2)$, $\varepsilon\colon x-2y+3z-5=0$

(c) $P(-1,-6,17)$, $\varepsilon\colon 3x-8z-7=0$

Aufgabe 7.30

Der Punkt $P'(0,0,7)$ ist der Spiegelpunkt von $P(4,3,-2)$. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ε, an der P gespiegelt wurde?

Aufgabe 7.31

Die Gerade g wird an der Ebene ε gespiegelt. Bestimme eine Parametergleichung der Spiegelgeraden g'.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon 4x + 2y - z + 1 = 0$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon x - 3y - 2z + 42 = 0$

Aufgabe 7.32

Ein Lichtstrahl geht durch $P(7, -7, 4)$ und wird an der Ebene $\varepsilon\colon 5x - 2y + 3z - 23 = 0$ reflektiert. Der Punkt $Q(7, -1, 8)$ liegt auf dem reflektierten Lichtstrahl. In welchem Punkt der Ebene ε erfolgt die Reflexion?

Aufgabe 7.33

Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle $P(14, 7, -11)$ aus, wird in $R(5, 1, 4)$ an der Ebene ε reflektiert und läuft anschliessend durch den Punkt $Q(3, 13, 2)$. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ε?

Aufgabe 7.34

Bestimme den spitzen Schnittwinkel der Ebenen ε und δ

(a) $\varepsilon\colon 5x - y - 6z + 1 = 0$; $\delta\colon 4x + z - 3 = 0$

(b) $\varepsilon\colon 3x - 2y + 5z - 2 = 0$; δ gegeben durch $P(3, -1, 4)$ und $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\varepsilon\colon 2x + 4y - 3z + 7 = 0$; δ gegeben durch die parallelen Geraden

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.35

Bestimme den spitzen Schnittwinkel von Gerade g und Ebene ε.

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon 3x - 4y + 6 = 0$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon 2x - 5y + z + 3 = 0$

Aufgabe 7.36

Für welchen Wert c schliesst die Ebene $\varepsilon\colon 4x + cz - 1 = 0$ mit der xy-Ebene einen Winkel von $45°$ ein?

Aufgabe 7.37

Ein gerader Kreiskegel besitzt die Spitze $S(-7,-3,14)$. Der Punkt $M(3,-1,3)$ ist der Mittelpunkt des Grundkreises. $P(1,-1,8)$ liegt auf einer Mantellinie des Kegels. Berechne das Volumen des Kegels.

Aufgabe 7.38

Vom Quadrat $ABCD$ sind $A(3,2,1)$, $B(-3,-1,-5)$ und $C(3,y,z)$ gegeben. Dieses Quadrat ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit dem Volumen $V = 324$.

(a) Bestimme die *ganzzahligen* Werte y und z.

(b) Welche Koordinaten hat die Spitze S der Pyramide? (zwei Lösungen)

Aufgabe 7.39

Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

(a) $P(3,5,1)$, $\varepsilon\colon 4x + 7y - 4z + 2 = 0$

(b) $P(7,-2,-5)$, $\varepsilon\colon 6x - 9y - 2z + 7 = 0$

(c) $P(-4,0,29)$, $\varepsilon\colon 15x + 8y - 8 = 0$

Aufgabe 7.40

$A(0,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,0)$ und $D(1,1,2)$ sind Eckpunkte einer Pyramide $ABCD$.

Berechne die Höhe der Pyramide über der Grundfläche BCD und den Winkel, den die Seitenkante AC mit der Grundfläche BCD einschliesst.

Aufgabe 7.41

Bestimme die Koordinatengleichungen der Parallelebenen zur Ebene ε im Abstand d.

(a) $\varepsilon\colon 11x - 2y + 10z - 15 = 0$, $d = 3$

(b) $\varepsilon\colon 24x - 7z + 5 = 0$, $d = 4$

(c) $\varepsilon\colon 9x + 12y + 8z - 6 = 0$, $d = 2$

Aufgabe 7.42

Bestimme die Koordinatengleichungen der winkelhalbierenden Ebenen der gegebenen Ebenen ε und δ.

(a) $\varepsilon\colon 4x-2y-4z+3=0,\ \delta\colon x+2y-2z+5=0$

(b) $\varepsilon\colon 6x+6y+17z-2=0,\ \delta\colon 15x-10y-6z+9=0$

(c) $\varepsilon\colon 10x-11y+2z-11=0,\ \delta\colon 4y-3z-8=0$

(d) $\varepsilon\colon 3x-6y-2z-10=0,\ \delta\colon 4x+8y-z-10=0$

Aufgabe 7.43

Welche Punkte auf der Geraden g haben von den Ebenen ε und δ gleiche Abstände?

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$\varepsilon\colon 3x-4y+2=0,\ \delta\colon 4x+3z+7=0$

(b) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$

$\varepsilon\colon 14x-7y-22z+38=0,\ \delta\colon 4x+7y-4z+2=0$

Aufgabe 7.44

(a) Welchen Abstand hat der Punkt $P(3,3,5)$ von der Ebene $\varepsilon\colon x-12y+12z+7=0$?

(b) Ein Punkt $Q(x,1,1)$ hat gleichen Abstand von ε und von der xy-Ebene. Bestimme seine x-Koordinate.

Aufgabe 8.1

Stelle die Gleichung der Kugel $K(M, \varrho)$ auf.

(a) $M(1, 1, 1)$, $\varrho = 4$

(b) $M(3, 0, -2)$, $\varrho = \sqrt{5}$

Aufgabe 8.2

Untersuche, ob es sich um die Gleichung einer Kugel handelt und bestimme in diesem Fall ihren Mittelpunkt M und ihren Radius ϱ.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = -12$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 2y + 4z = 25$

(d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$

Aufgabe 8.3

Schneide die Kugel $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ mit der Grundrissebene.

Aufgabe 8.4

Eine Kugel mit Zentrum $M(3, 1, -4)$ schneidet die y-Achse im Punkt $B(0, 7, 0)$. Bestimme die übrigen Schnittpunkte der Kugel mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 8.5

Untersuche die gegenseitige Lage von Kugel K und Gerade g und bestimme allfällige Schnitt- oder Berührungspunkte.

(a) $K\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $K\colon x^2 + y^2 + z^2 = 49$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $K\colon (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 9$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8.6

Bestimme die Gleichung der Umkugel des Tetraeders mit den Ecken $A(5,5,1)$, $B(7,1,-3)$, $C(2,7,2)$ und, $D(0,1,8)$.

Aufgabe 8.7

Zeige, dass der Punkt $P(8,7,2)$ auf der Kugel mit dem Mittelpunkt $M(1,3,6)$ und dem Radius $\varrho = 9$ liegt und bestimme die Gleichung der Tangentialebene in P.

Aufgabe 8.8

Vom Punkt $A(10,0,0)$ aus soll eine Tangentialebene an die Kugel $K\colon x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gelegt werden, die zur Grundrissebene π_1 senkrecht steht.

Aufgabe 8.9

Bestimme die Tangentialebenen an die Kugel mit $M(0,0,0)$ und $\varrho = 3$, welche die Gerade mit der Gleichung

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

enthalten.

Aufgabe 8.10

Bestimme die Tangentialebenen an die Kugel mit $M(0,0,0)$ und $\varrho = 5$, die senkrecht zur Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stehen.

Aufgabe 8.11

Gegeben sei die Kugel K mit $M(8,3,2)$ und $\varrho = 5\sqrt{2}$ sowie die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fasst man den Punkt $A(-3,-2,-4)$ der Geraden als Lichtquelle auf und betrachtet die Kugelfläche K als Spiegel, so wird der Lichtstrahl g an der Kugel reflektiert. Bestimme eine Parametergleichung des reflektierten Lichtstrahls.

Aufgabe 8.12

Gegeben sind die Kugeln K_1 und K_2 mit den Mittelpunkten $M_1(1, 13, 18)$ bzw. $M_2(-1, 13, 14)$ und den Radien $\varrho_1 = 7$ bzw. $\varrho_2 = 3$. Zeige, dass sich die Kugeln schneiden und bestimme den Radius r des Schnittkreises.