Aufgabe 7.1

Richtungsvektoren von ε: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von ε: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 64 \\ 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}_\varepsilon$

$A(5,-3,8) \in \varepsilon$: $1 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 8 + D = 0$

$D = -17$

$\varepsilon\colon x + 4y + 3z - 17 = 0$

Aufgabe 7.2

Richtungsvektoren von ε: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ortsvektor zum Punkt $A(5,-3,8)$: $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.3

Setze $P(5,0,4)$ in ε ein:

$2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 4 - 22 = 0$

$0 = 0$

$\Rightarrow \quad P \in \varepsilon$

Aufgabe 7.5

Die parallelen Ebenen ε und δ haben den gleichen Normalenvektor. Durch Einsetzen eines Punktes $P \in \delta$ kann D_δ von δ bestimmt werden:

$P(5,1,4) \in \delta$:

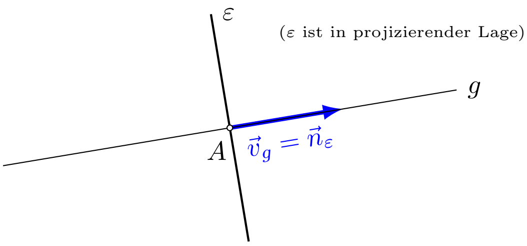
$2 \cdot x + (-1) \cdot y + 3 \cdot z + D_\delta = 0$

$2 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 + D_\delta = 0$

$D_\delta = -21$

$\delta\colon 2x - y + 3z - 21 = 0$

Aufgabe 7.6



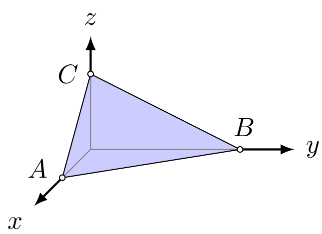
$\vec{n}_\varepsilon = \vec{v}_g$

$P(2,3,-1) \in \varepsilon\colon\ (-2)\cdot x + 1\cdot y + 2\cdot z + D = 0$

$$(-2)\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + D = 0$$
$$D = 3$$

$\varepsilon\colon\ -2x + y + 2z + 3 = 0$

Aufgabe 7.7



Achsenabschnitte:

$A(a,0,0) \in \varepsilon$: $4\cdot a + (-3)\cdot 0 + 6\cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow a = 3$

$B(0,b,0) \in \varepsilon$: $4\cdot 0 + (-3)\cdot b + 6\cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow b = -4$

$C(0,0,c) \in \varepsilon$: $4\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + 6\cdot c - 12 = 0 \Rightarrow c = 2$

Aufgabe 7.8

$\varepsilon \cap g$:

$$3\cdot(-9-5\cdot t) + 0\cdot(11+2\cdot t) + 5\cdot(9+4\cdot t) - 8 = 0$$
$$5\cdot t + 10 = 0$$
$$t = -2$$

Setze $t = -2$ in g ein $\quad\Rightarrow\quad S(1,7,1)$

Aufgabe 7.10

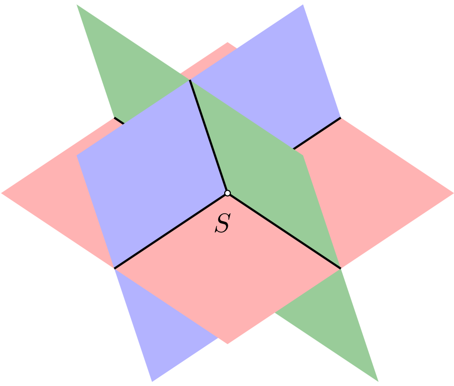
$\varepsilon \cap g$:

$$-3(-1-2t) + 1(2+2t) - 8(2+1t)11 = 0$$
$$0\cdot t + 0 = 0$$

Jedes $t \in \mathbb{R}$ ist Lösung $\quad\Rightarrow\quad g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.12

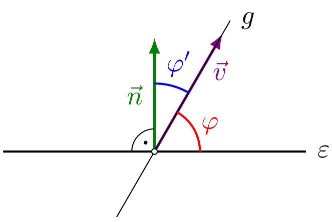
Die Koordinaten des Schnittpunkts $S(x, y, z)$ müssen alle drei Ebenengleichungen simultan erfüllen:



$$\begin{aligned} 2x + y + 3z - 25 &= 0 & & 2 \cdot x + 1 \cdot y + 3 \cdot z = 25 \\ 5x + z - 44 &= 0 & \Rightarrow \quad & 5 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 44 \\ 6x + 5y + 2z - 41 &= 0 & & 6 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z = 41 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad S(8, -3, 4)$

Aufgabe 7.13



(ε ist in projizierender Lage)

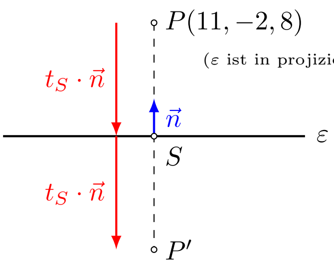
Normalenvektor von ε: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor von g: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \arccos \frac{|10|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{25}} = 48.19^\circ$$

$\varphi = 90 - \varphi' = 41.81^\circ$ [oder direkt mit $\arcsin(\ldots)$]

Aufgabe 7.14



(ε ist in projizierender Lage)

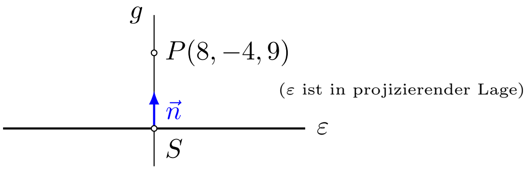
Lot von $P(11,-2,8)$ auf ε: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Komponentengleichungen von g in ε einsetzen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (11 + 1 \cdot t) - 1 \cdot (-2 - 1 \cdot t) + 2 \cdot (8 + 2 \cdot t) - 11 &= 0 \\ 6 \cdot t + 18 &= 0 \\ t_S &= -3 \end{aligned}$$

$t = 2t_S = -6$ in g einsetzen: $P'(5,4,-4)$

Aufgabe 7.15



Lot von P auf ε: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon\colon 2(8 + 2 \cdot t) - (-4 - 1 \cdot t) + 2(9 + 2 \cdot t) - 2 &= 0 \\ 9 \cdot t + 36 &= 0 \\ t_S &= -4 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{SP}| = |t_S \cdot \vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 12$$

oder $t_S = -4$ in g einsetzen: $S(0,0,1)$

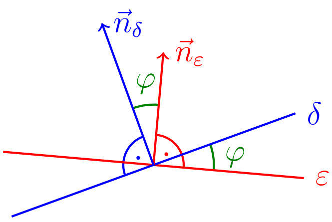
und den Abstand der Punkte P und S berechnen:

$$d(P,\varepsilon) = |\overrightarrow{SP}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 12$$

Aufgabe 7.18

$\varepsilon\colon 3x - 2y - 2z - 2 = 0$ und $\delta\colon 4x - 3y - 2z - 4 = 0$

(a) Schnittwinkel:



$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \ \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|} \\ &= \arccos \frac{|12+6+4|}{\sqrt{9+4+4} \cdot \sqrt{16+9+4}} = 7.77^\circ\end{aligned}$$

(b) Der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Schnittgeraden von ε und δ steht senkrecht auf den beiden Normalenvektoren $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$.

$$\vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme einen beliebigen Punkt $P(x, y, z)$, der in ε *und* δ liegt. Dazu setze ich eine der Koordinaten null in deren Richtung die Komponente von $\vec{v}$ nicht null ist (z. B. $z = 0$).

$$\begin{array}{l} \varepsilon\colon 3x - 2y - 2 = 0 \\ \delta\colon 4x - 3y - 4 = 0 \end{array} \quad \overset{\text{TR}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(-2, -4, 0)$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$