Aufgabe 6.1

(a) Richtungsvektor: $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Richtungsvektoren dürfen gestreckt/gestaucht werden)

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Wähle den Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt von g – hier A)

(b) Da die x-Komponete des Richtungsvektors null ist, muss die Gerade parallel zur yz-Ebene (π_2) liegen. Also handelt es sich um eine *zweite Hauptgerade.*

Aufgabe 6.2

(a) Ortsvektor zum Punkt $A(5, -3, 2)$ auf der Geraden g.

(b) Richtungsvektor der Geraden g

(c)
$$\begin{aligned} -7 &= 5 + 4t \\ -6 &= -3 + t \\ 11 &= 2 - 3t \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -12 &= 4t \\ -3 &= t \\ 9 &= -3t \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} t &= -3 \\ t &= -3 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P(-7, -6, 11) \in g$

Aufgabe 6.3

(a) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Die y-Komponente im Richtungsvektor kann einen willkürlichen Wert $\neq 0$ haben.)

(b) Welche spezielle Lage hat diese Gerade?

Da der Richtungsvektor von g parallel zur y-Achse ist, steht g senkrecht zur xz-Ebene (π_3). Daher handelt es sich ume eine *drittprojizierende* Gerade.

Aufgabe 6.4

(a) Die Spurpunkte von g sind die (allfälligen) Schnittpunkte von g mit den Koordinatenebenen π_1, π_2 und π_3.

$S_1(x, y, 0)$: $0 = 6 + 2t \quad \Rightarrow \quad t = -3 \quad \Rightarrow \quad S_1(7, 12, 0)$

$S_2(0, y, z)$: $0 = 7 + 0t \quad \Rightarrow \quad$ keine Lösung $\quad \Rightarrow \quad$ kein S_2

$S_3(x, 0, z)$: $0 = 9 - t \quad \Rightarrow \quad t = 9 \quad \Rightarrow \quad S_3(7, 0, 24)$

(b) Da die x-Komponente des Richtungsvektors von g null ist, liegt g parallel zur π_2 (2. Hauptgerade). Deshalb kann es nur die zwei Spurpunkte S_1 und S_3 geben.

Aufgabe 6.5

- die Richtungsvektoren sind kollinear: $-\frac{2}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

- Prüfe, ob z. B. $A(8, 3, -11) \in h$:

$$\begin{array}{rclcrclcrclcl} 8 &=& -4 + 4t & & 12 &=& 4t & & t &=& 3 & & \\ 3 &=& 9 - 2t & \Rightarrow & -6 &=& -2t & \Rightarrow & t &=& 3 & \Rightarrow & A \in h \\ -11 &=& 7 - 6t & & -18 &=& -6t & & t &=& 3 & & \end{array}$$

Also: $g = h$

Aufgabe 6.6

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

Gibt es einen gemeinsamen Punkt $\{S\} = g \cap h$?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -2s - 3t &=& -10 \\ 5s - 5t &=& -4 \\ 3s + 2t &=& 7 \end{array}$$

keine Lösungen

Die Geraden g und h sind windschief.

Aufgabe 6.7

- Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

- Gibt es einen gemeinsamen Punkt $\{S\} = g \cap h$?

$$\begin{aligned} -15 + 2s &= -17 + 6t \\ -1 + s &= -2 + 3t \\ 19 - 2s &= 5 + 2t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2s - 6t &= -2 \\ s - 3t &= -1 \\ -2s - 2t &= -14 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s &= 5 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Schnittpunkt: $S(-5, 4, 9)$

- spitzer Schnittwinkel: $\varphi = \arccos \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \arccos \dfrac{11}{3 \cdot 7} = 58.41\,^\circ$

Aufgabe 6.8

- Die Richtungsvektoren sind kollinear: $2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

- Teste, ob $A(3, 9, -6) \in h$:

$$\begin{aligned} 3 &= -9 + 4t \\ 9 &= 7 + 2t \\ -6 &= 2 - 4t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 12 &= 4t \\ 2 &= 2t \\ -8 &= -4t \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{aligned} t &= 3 \\ t &= 1 \\ t &= 2 \end{aligned} \ \Rightarrow \ A \notin h \ \Rightarrow \ g \parallel h$$

- $d(g, h) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}_g|}{|\vec{v}_g|} = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \dfrac{12}{3} = 4$

(Statt mit $\vec{v}_g$ hätte man auch mit dem kollinearen Richtungsvektor $\vec{v}_h$ rechnen können)

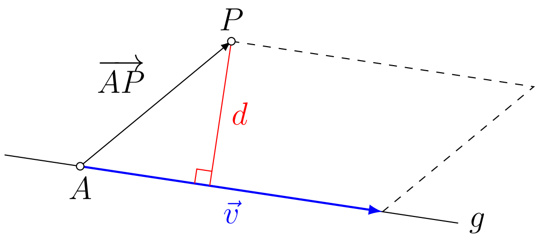
Aufgabe 6.9

Richtungsvektor der gesuchten (senkrechten) Geraden h:

$$\vec{v}_h = \left(\vec{AP} \times \vec{v}\right) \times \vec{v} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.10



$$F = |\vec{v}| \cdot d = |\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|$$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$d(P, g) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{22^2 + (-16)^2 + 14^2}}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}} = 6$$