Aufgabe 1

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 26 \\ -39 \\ -13 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

$C(5,6,8),\ F(12,4,16),\ G(13,5,17),\ H(7,3,11),$

Aufgabe 4

(a) $P_a(5,-4,-3)$

(b) $P_b(-5,4,3)$

(c) $P_c(-5,-4,3)$

(d) $P_d(9,0,5)$

Aufgabe 5

$M(1,4,4)$

Aufgabe 6

$S(2,-1,5)$

Aufgabe 7

$S(2,-2,2.5)$

Aufgabe 8

ja

Aufgabe 9

$\vec{d} = -\vec{a} + 3\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$

Aufgabe 10

$\left|\vec{a}\,\right| = 9$

Aufgabe 11

$\left|\overrightarrow{AB}\,\right| = 11$

Aufgabe 12

$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13

$\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = -7$

Aufgabe 14

Ja, da $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Aufgabe 15

$\vec{b} = \vec{b}_{||a} + \vec{b}_{\perp a} \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix}$

Aufgabe 16

$\varphi = 108.2°$

Aufgabe 17

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ -19 \end{pmatrix}$

Aufgabe 18

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\,\right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ -13 \end{pmatrix} \right| = 22.52$

Aufgabe 19

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-16\\8\\16\end{pmatrix}\right| = 12$$

Aufgabe 20

$$V = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = 40$$

Aufgabe 21

$$\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = 0.5$$

Aufgabe 22

Nein, da das Spatprodukt den Wert $-5 \neq 0$ hat.

Aufgabe 23

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 24

ja

Aufgabe 25

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 26

$S_1(3,1,0)$, S_2 existiert nicht, $S_3(3,0,2)$

Aufgabe 27

$$d(P,g) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = 7$$

Aufgabe 28

$$d(g,h) = \frac{\left|\left(\vec{v}_g\times\vec{v}_h\right)\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{v}_g\times\vec{v}_h\right|} = 10$$

Aufgabe 29

g und h sind identisch, denn

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind kollinear $\left(\vec{v}_h = -3\vec{v}_g\right)$,
- $A_g(5, 2, -2) \in h$.

Aufgabe 30

g und h sind parallel, denn

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind kollinear $\left(\vec{v}_h = 2\vec{v}_g\right)$,
- $A_g(-2, 0, -2) \notin h$.

Aufgabe 31

Die Geraden schneiden sich, denn

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind nicht kollinear,
- das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat eine Lösung ($s = -3$, $t = 2$).

Aufgabe 32

Die Geraden sind windschief, denn

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind nicht kollinear,
- das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat keine Lösung.

Aufgabe 33

Die beiden Geradengleichungen gleichsetzen:

$A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$

Stellt man diese Vektorgleichung zeilenweise dar, erhält man ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es hat die Lösung $s = -2$, $t = 1$.

Durch Einsetzen von $s = -2$ in g (oder $t = 1$ in h) bekommt man den Schnittpunkt $S(1, 3, -4)$.

Der Schnittwinkel ist der spitze Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren: $\angle(g, h) = 78.9°$

Aufgabe 34

Die Richtungsvektoren der Lotgeraden $\vec{v}_h$ stehen senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird.

$\vec{v}_h = \vec{v}_g \times \left(\vec{v}_g \times \overrightarrow{AP}\right)$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 35

Schnittpunkt: $S(5, 8, 1)$

$w_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ 19 \end{pmatrix}$ und $w_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 36

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 37

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 38

leider nein

Aufgabe 39

$$\delta\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 40

Schnittpunkt $S(3, -2, 5)$

Aufgabe 41

$\varepsilon\colon 13x - 16y - 9z + 5 = 0$

Aufgabe 42

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 43

Richtungsvektoren der Ebene: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

Setze die Koordinaten von einem der drei Punkte in die Gleichung

$\varepsilon\colon 2x + 6y - 5z + d = 0$

ein und löse nach d auf. $\Rightarrow \varepsilon\colon 2x + 6y - 5z - 5 = 0$

Aufgabe 44

Richtungsvektoren der Ebene: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Setze die Koordinaten von einem der Punkte $P(-1, 3, 5)$ oder $A(4, 2, 4)$ in

$\varepsilon\colon x + 2y + 3z + d = 0$

ein und löse nach d auf. $\Rightarrow \varepsilon\colon x + 2y + 3z - 20 = 0$

Aufgabe 45

Setze die Koordinaten des Punkts $P(9, 5, -1)$in die Koordinatengleichung ein.

Wegen $0 = 0$ gilt $P \in \varepsilon$.

Aufgabe 46

Eine parallele Ebene hat den gleichen Normalenvektor wie ε. Also müssen wir die Koordinaten des Punkts $P(4, 4, 4)$ in die Gleichung $\delta\colon 3x + 7y + z + d = 0$ einsetzen und nach d auflösen $\Rightarrow \delta\colon 3x + 7y + z - 44 = 0$

Aufgabe 47

Setze die Koordinaten von $P(1, 2, 3)$ in die Hessesche Abstandsformel ein:

$\mathrm{dist}(P, \varepsilon) = \dfrac{9 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 20 \cdot 3}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = 4.32$

Aufgabe 48

Um den x-Achensbschnitt zu bestimmen, muss der Punkt A(x,0,0)in die Koordinatengleichung eingesetzt und diese nach x aufgelöst werden. Bei den anderen Achsenabschnitte geht man analog vor.

x-Achsenabschnitt: $x = -4$

y-Achsenabschnitt: $y = 12$

z-Achsenabschnitt: $y = -6$

Aufgabe 49

$\vec{v}_g \perp \vec{n}_\varepsilon$ und $A(6, 5, -2) \notin \varepsilon \quad \Rightarrow \quad g \parallel \varepsilon$

Aufgabe 50

$\vec{v}_g \perp \vec{n}_\varepsilon$ und $A(-1, 3, 9) \in \varepsilon \quad \Rightarrow \quad g \subset \varepsilon$

Aufgabe 51

Zerlege die Geradengleichung in ihre Komponenten:

$x = -4 + 2t$, $y = -10 + 3t$ und $z = 8 - 2t$

setze diese Terme in die Koordinatengleichung ein:

$3 \cdot (-4 + 2t) - 1 \cdot (-10 + 3t) + 4 \cdot (8 - 2t) - 15 = 0$

und setze die Lösung $t = 3$ in die Geradengleichung ein: $S(2, -1, 2)$

Für den Winkel zwischen Gerade und Ebene Berechne den spitzen Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}_\varepsilon$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ der Geraden und ergänze das Resultat auf 90°: $\angle(g, \varepsilon) = 13.76°$

Aufgabe 52

$\angle(g, \varepsilon) = 38.74°$

Aufgabe 53

Die Gerade soll durch den Punkt $P(17, 8, -14)$ gehen und senkrecht zur Ebene ε stehen. Letzteres bedeutet, dass der Normalenvektor der Ebene der Richtungsvektor der gesuchten Geraden ist:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 54

$\delta\colon 3x - 8y - 7z + 1 = 0$

Aufgabe 55

Zerlege die zu ε senkrechte Gerade durch P

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in ihre Komponenten:

$x = 5 + t$, $y = -2 - 2t$ und $z = 1 + 3t$

setze diese Terme in die Koordinatengleichung ein:

$1 \cdot (5 + t) - 2 \cdot (-2 - 2t) + 3 \cdot (1 + 3t) - 5 = 0$

und setze die verdoppelte Lösung $2t = -1$ in die Geradengleichung ein: $P'(4, 0, -2)$

Aufgabe 56

Die Mittelnormalebene (MNE) ist diejenige Ebene, die normal (senkrecht) zur Strecke AB steht und durch ihren Mittelpunkt $M(2, 7, 2)$ geht.

Als Normalenvektoren der MNE können wir

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

verwenden. Der Rest der Prozedur sollte bekannt sein ...

$\mu\colon 7x + y - 5z - 11 = 0$

Aufgabe 57

Der Winkel zwischen den Ebenen ist gleich gross wie der Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren:

$\angle(\varepsilon, \delta) = \angle(\vec{n}_\varepsilon, \vec{n}_\delta) = \cdots = 86.04°$

Aufgabe 58

$\varepsilon = \delta$

Aufgabe 59

- $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$ sind kollinear
- $\operatorname{dist}(P, \varepsilon) \neq \operatorname{dist}(P, \delta)$ für einen Testpunkt P, wie z. B. $(0, 0, 0)$

Aufgabe 60

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden s steht senkrecht auf beiden Ebenen:

$\vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für einen Anfangspunkt der Geraden wählen wir einen Punkt mit einfachen Koordinaten, der auf beiden Ebenen liegen soll. Zum Beispiel: $P(x, y, 0)$

Setze diese Koordinaten in die beiden Ebenengleichungen ein und versuche, das zugehörige Gleichungssystem zu lösen. Wenn es eine Lösung besitzt, haben wir einen Punkt der Schnittgeraden gefunden. Anderfalls setzt man eine der anderen beiden Koordinaten null. (Früher oder später wird man erfolgreich sein, da die Schnittgerade nicht zu allen Koordinatenebenen parallel sein kann.)

$$\varepsilon \cap \delta = s \text{ mit } s\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 61

$\omega_1\colon x + y + 4z + 2 = 0$

$\omega_2\colon 3x + 3y + 8 = 0$

Aufgabe 62

$S\colon (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 5$

Aufgabe 63

Mittelpunktsform (quadratisches Ergänzen):

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 3 = 0$

$(x^2 - 2)^2 + (y^2 - 4)^2 + (z^2 + 1)^2 = 18$

$M(2, 4, -1),\ \varrho = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Aufgabe 64

$M = (3, 1, -6)$

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-(-1) \\ 7-6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 25 + 16 + 1 = 42$$

Wegen $\left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = 42 > 40$ liegt P ausserhalb der Sphäre.

Aufgabe 65

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)^T$; $x = t$, $y = 6 + t$, $z = 2 + t$

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 &= 18 \\
(t-2)^2 + (t-2)^2 + (t+1)^2 &= 18 \\
3t^2 - 6t + 9 &= 18 \\
t^2 - 2t - 3 &= 0 \\
(t+1)(t-3) &= 0 \\
t_1 = -1 \quad &\Rightarrow \quad P_1(-1, 5, 1) \\
t_2 = 3 \quad &\Rightarrow \quad P_2(3, 9, 5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 66

$\vec{n}_\varepsilon = (3, 2, -6)^T$; $M(3, 1, -2)$

Komponenten der Gerade g durch M normal zu ε:

$x = 3 + 3t,\ y = 1 + 2t,\ z = -2 - 6t$

$$\begin{aligned}
(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 &= 49\\
(3t)^2 + (2t)^2 + (-6t)^2 &= 49\\
49t^2 &= 49\\
t_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(6, 3, -8)\\
t_2 &= -1 \quad \Rightarrow \quad P_2(0, -1, 4)
\end{aligned}$$

$\delta_1 \colon \vec{n}_\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}_{P_1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 \colon 3x + 2y - 6z - 72 = 0$

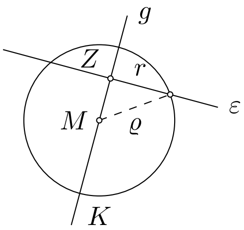
$\delta_2 \colon \vec{n}_\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}_{P_2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 \colon 3x + 2y - 6z + 26 = 0$

Aufgabe 67

Mittelpunktsform: (quadratisches Ergänzen)

$K \colon (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-11)^2 = 103 + 1 + 121 = 225$

$M(0, 1, 11)$, $\varrho = 15$



Gerade g durch M mit Richtungsvektor $\vec{n}_\varepsilon = (2, 2, -1)^T$:

$x = 0 + 2t,\ y = 1 + 2t,\ z = 11 - t$

$$\begin{aligned}
g \cap \varepsilon \colon \qquad 2x + 2y - z - 18 &= 0\\
2(0+2t) + 2(1+2t) - (11-t) - 18 &= 0\\
9t - 27 &= 0\\
t &= 3
\end{aligned}$$

Zentrum des Schnittkreises: $Z(6, 7, 8)$

$\overrightarrow{MZ} = (6, 6, -3)^T \quad \Rightarrow \quad MZ = 9$

$r = \sqrt{\varrho^2 - MZ^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$

Aufgabe 68

Ein Berührpunkt B muss folgende Gleichungen erfüllen

$$\big(\vec r_B - \vec r_M\big)\big(\vec r_B - \vec r_M\big) = \varrho^2 \quad (1)$$
$$\big(\vec r_B - \vec r_M\big)\vec v = 0 \quad (2)$$
$$\big(\vec r_B - \vec r_M\big)\big(\vec r_A - \vec r_M\big) = \varrho^2 \quad (3)$$

Bemerkungen:

- (1) ist die Gleichung der Sphäre in Skalarproduktform
- (3) erhält man durch cleveres Umformen von $\big(\vec r_B - \vec r_M\big)\big(\vec r_A - \vec r_B\big) = 0$

$M(1,7,2),\ \varrho = \sqrt{6},\ \vec v = (2,4,1)^T,\ \overrightarrow{MA} = (2,-2,-2)$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 &= 6 \quad (1)\\ 2(x-1) + 4(y-7) + (z-2) &= 0 \quad (2)\\ 2(x-1) - 2(y-7) - 2(z-2) &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 32 \quad (2)\\ 2x - 2y - 2z &= -16 \quad (3) \end{aligned}$$

x eliminieren: $6y + 3z = 48 \quad \Rightarrow \quad y = 8 - z/2$

y eliminieren: $6x - 3z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z/2$

in (1) einsetzen und nach z auflösen:

$$\begin{aligned} \big(\tfrac{z}{2} - 1\big)^2 + \big(1 - \tfrac{z}{2}\big)^2 + \big(z-2\big)^2 &= 6\\ \tfrac{3}{2}z^2 - 6z + 6 &= 6\\ z^2 - 4z &= 0\\ z_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad B_1(0,8,0)\\ z_2 &= 4 \quad \Rightarrow \quad B_2(2,6,4) \end{aligned}$$

$\vec n_1 = \vec r_{B_1} - \vec r_M = (-1,1,-2)^T$

$\vec n_2 = \vec r_{B_2} - \vec r_M = (1,-2,1)^T$

$\tau_1\colon x - y + 2z + 8 = 0$

$\tau_2\colon x - 2y + z - 4 = 0$