Vektorgeometrie

Grundaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Berechne $\vec{v} = 7\vec{a} - 3\vec{b}$.

Aufgabe 1

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 26 \\ -39 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

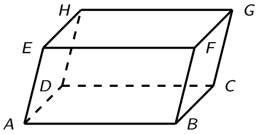
Löse die Gleichung $2\vec{a} - 3\vec{v} + 0.5\vec{b} = \vec{c}$ nach $\vec{v}$ auf.

Aufgabe 2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Gegeben sind die Ecken $A(-2,3,1)$, $B(4,5,7)$, $D(-1,4,2)$ und $E(6,2,10)$ eines Spats. Bestimme die Koordinaten der übrigen Ecken C, F, G und H.



Aufgabe 3

$C(5,6,8)$, $F(12,4,16)$, $G(13,5,17)$, $H(7,3,11)$,

Aufgabe 4

Spiegle den Punkt $P(5, 4, -3)$

(a) an der xz-Ebene,

(b) an der y-Achse,

(c) am Ursprung,

(d) am Punkt $Z(7, 2, 1)$.

Aufgabe 4

(a) $P_a(5, -4, -3)$

(b) $P_b(-5, 4, 3)$

(c) $P_c(-5, -4, 3)$

(d) $P_d(9, 0, 5)$

Aufgabe 5

Bestimme den Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten $A(-2, 3, 1)$ und $B(4, 5, 7)$.

Aufgabe 5

$M(1, 4, 4)$

Aufgabe 6

Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks mit $A(7, 2, 8)$, $B(3, -5, 1)$ und $C(-4, 0, 6)$.

Aufgabe 6

$S(2, -1, 5)$

Aufgabe 7

Bestimme den Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(6,5,-4)$, $B(3,0,11)$, $C(-9,-1,2)$ und $D(8,-12,1)$.

Aufgabe 7

$S(2, -2, 2.5)$

Aufgabe 8

Prüfe, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgabe 8

ja

Aufgabe 9

Zerlege $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$ nach den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9

$$\vec{d} = -\,\vec{a} + 3\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$$

Aufgabe 10

Berechne die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 10

$$\left|\vec{a}\right| = 9$$

Aufgabe 11

Berechne den Abstand der Punkte $A(11, -1, 9)$ und $B(2, 1, 3)$.

Aufgabe 11

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 11$$

Aufgabe 12

Bestimme alle Vektoren der Länge 9, die kollinear zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

Aufgabe 12

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13

Berechne $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 13

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = -7$$

Aufgabe 14

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Aufgabe 14

Ja, da $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Aufgabe 15

Zerlege den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \\ 29 \end{pmatrix}$ in eine Komponente $\vec{b}_{||a}$ parallel zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und in eine Komponente $\vec{b}_{\perp a}$ senkrecht zu $\vec{a}$.

Aufgabe 15

$$\vec{b} = \vec{b}_{||a} + \vec{b}_{\perp a} \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 16

$\varphi = 108.2^\circ$

Aufgabe 17

Bestimme einen Vektor, der orthogonal zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht.

Aufgabe 17

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18

Welchen Flächeninhalt hat das durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm?

Aufgabe 18

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ -13 \end{pmatrix} \right| = 22.52$$

Aufgabe 19

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit $A(-2, 1, 3)$, $B(3, 5, 6)$ und $C(-1, 5, 2)$.

Aufgabe 19

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-16\\8\\16\end{pmatrix}\right| = 12$$

Aufgabe 20

Berechne das Volumen des Spats, der durch die Vektoren
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 20

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = 40$$

Aufgabe 21

Berechne das Volumen des Tetraeders mit den Ecken $A(1,0,2)$, $B(2,3,4)$, $C(3,2,5)$ und $D(4,4,6)$.

Aufgabe 21

$$\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right| = 0.5$$

Aufgabe 22

Untersuche, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ komplanar sind.

Aufgabe 22

Nein, da das Spatprodukt den Wert $-5 \neq 0$ hat.

Aufgabe 23

Stelle eine Gleichung der Geraden durch die Punkte $A(3, -2, 5)$ und $B(4, 1, 7)$ auf.

Aufgabe 23

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 24

Liegt der Punkt $P(13, 1, -10)$ auf der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 24

ja

Aufgabe 25

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(7, 6, 3)$ geht und parallel zur Geraden
$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Aufgabe 25

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26

Bestimme alle Spurpunkte der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26

$S_1(3,1,0)$, S_2 existiert nicht, $S_3(3,0,2)$

Aufgabe 27

Bestimme den Abstand des Punktes $P(0,3,7)$ von der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27

$$d(P,g) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = 7$$

Aufgabe 28

Bestimme den Abstand der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28

$$d(g,h) = \frac{\left|\left(\vec{v}_g \times \vec{v}_h\right) \cdot \overrightarrow{AB}\,\right|}{\left|\vec{v}_g \times \vec{v}_h\,\right|} = 10$$

Aufgabe 29

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29

g und h sind identisch, denn

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind kollinear $\left(\vec{v}_h = -3\vec{v}_g\right)$,
- $A_g(5, 2, -2) \in h$.

Aufgabe 30

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30

g und h sind parallel, denn

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind kollinear $\left(\vec{v}_h = 2\vec{v}_g\right)$,
- $A_g(-2, 0, -2) \notin h$.

Aufgabe 31

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 31

Die Geraden schneiden sich, denn

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind nicht kollinear,
- das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat eine Lösung ($s = -3$, $t = 2$).

Aufgabe 32

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32

Die Geraden sind windschief, denn

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind nicht kollinear,
- das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat keine Lösung.

Aufgabe 33

Zeige, dass sich die Geraden

$$g:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne den Schnittpunkt sowie den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 33

Die beiden Geradengleichungen gleichsetzen:

$A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$

Stellt man diese Vektorgleichung zeilenweise dar, erhält man ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es hat die Lösung $s = -2$, $t = 1$.

Durch Einsetzen von $s = -2$ in g (oder $t = 1$ in h) bekommt man den Schnittpunkt $S(1, 3, -4)$.

Der Schnittwinkel ist der spitze Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren: $\angle(g, h) = 78.9^\circ$

Aufgabe 34

Bestimme eine Gleichung der Geraden h, die orthogonal zur Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht und durch den Punkt $P(5, 8, 1)$ geht.

Aufgabe 34

Die Richtungsvektoren der Lotgeraden $\vec{v}_h$ stehen senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird.

$$\vec{v}_h = \vec{v}_g \times \left(\vec{v}_g \times \overrightarrow{AP}\right)$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 35

Zeige, dass sich die beiden Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

schneiden und bestimme Gleichungen ihrer Winkelhalbierenden.

Aufgabe 35

Schnittpunkt: $S(5,8,1)$

$$w_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ 19 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$w_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 36

Bestimme eine Parametergleichung der Ebene ε, die durch die Punkte $A(5, -3, 4)$, $B(7, 1, 5)$ und $C(9, 0, 3)$. definiert ist.

Aufgabe 36

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 37

Bestimme eine Parametergleichung der Ebene ε, die durch den Punkt $P(2, 3, -4)$, und die Gerade

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ definiert ist.

Aufgabe 37

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 38

Untersuche, ob der Punkt $P(5,5,5)$ in der Ebene

$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ liegt.

Aufgabe 38

leider nein

Aufgabe 39

Gib eine Parametergleichung der Ebene δ an, die parallel zur Ebene

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

liegt und durch den Punkt. $P(7, -4, 6)$ geht.

Aufgabe 39

$$\delta\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 40

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit der Ebene

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40

Schnittpunkt $S(3, -2, 5)$

Aufgabe 41

Stelle die Ebene ε: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der Koordinatenform dar.

Aufgabe 41

$\varepsilon\colon 13x - 16y - 9z + 5 = 0$

Aufgabe 42

Stelle die Ebene $\varepsilon\colon x - 3y + 2z - 10 = 0$ in der Parameterform dar.

Aufgabe 42

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 43

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die Punkte $A(9, -3, -1)$, $B(5, 0, 1)$ und $C(2, 6, 7)$ definiert wird.

Aufgabe 43

Richtungsvektoren der Ebene: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

Setze die Koordinaten von einem der drei Punkte in die Gleichung

$\varepsilon\colon 2x + 6y - 5z + d = 0$

ein und löse nach d auf. $\Rightarrow \varepsilon\colon 2x + 6y - 5z - 5 = 0$

Aufgabe 44

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt $P(-1, 3, 5)$ und die Gerade

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmt wird.

Aufgabe 44

Richtungsvektoren der Ebene: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Setze die Koordinaten von einem der Punkte $P(-1, 3, 5)$ oder $A(4, 2, 4)$ in

$\varepsilon\colon x + 2y + 3z + d = 0$

ein und löse nach d auf. $\Rightarrow \varepsilon\colon x + 2y + 3z - 20 = 0$

Aufgabe 45

Untersuche, ob der Punkt $P(9, 5, -1)$ in der Ebene
$\varepsilon\colon 2x - 3y + 4z + 1 = 0$ liegt.

Aufgabe 45

Setze die Koordinaten des Punkts $P(9, 5, -1)$in die Koordinatengleichung ein.

Wegen $0 = 0$ gilt $P \in \varepsilon$.

Aufgabe 46

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ, die parallel zur Ebene $\varepsilon\colon 3x + 7y + z - 2 = 0$ liegt und durch den Punkt $P(4, 4, 4)$ geht.

Aufgabe 46

Eine parallele Ebene hat den gleichen Normalenvektor wie ε. Also müssen wir die Koordinaten des Punkts $P(4,4,4)$ in die Gleichung $\delta\colon 3x + 7y + z + d = 0$ einsetzen und nach d auflösen $\Rightarrow$
$\delta\colon 3x + 7y + z - 44 = 0$

Aufgabe 47

Berechne den Abstand des Punktes $P(1,2,3)$ von der Ebene
$\varepsilon\colon 9x + 12y + 20z + 15 = 0$.

Aufgabe 47

Setze die Koordinaten von $P(1,2,3)$ in die Hessesche Abstandsformel ein:

$$\operatorname{dist}(P,\varepsilon) = \frac{9\cdot 1 + 12\cdot 2 + 20\cdot 3}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}} = 4.32$$

Aufgabe 48

Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene $\varepsilon\colon 3x - y + 2z + 12 = 0$

Aufgabe 48

Um den x-Achensbschnitt zu bestimmen, muss der Punkt A(x,0,0)in die Koordinatengleichung eingesetzt und diese nach x aufgelöst werden. Bei den anderen Achsenabschnitte geht man analog vor.

x-Achsenabschnitt: $x = -4$

y-Achsenabschnitt: $y = 12$

z-Achsenabschnitt: $y = -6$

Aufgabe 49

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebene
$\varepsilon\colon 3x + y - 2z + 12 = 0$ und der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 49

$\vec{v}_g \perp \vec{n}_\varepsilon$ und $A(6, 5, -2) \notin \varepsilon \quad \Rightarrow \quad g \parallel \varepsilon$

Aufgabe 50

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebene
$\varepsilon\colon 2x - 2y - z + 17 = 0$ und der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 50

$$\vec{v}_g \perp \vec{n}_\varepsilon \text{ und } A(-1,3,9) \in \varepsilon \quad \Rightarrow \quad g \subset \varepsilon$$

Aufgabe 51

Berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel der Geraden

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der Ebene

$\varepsilon\colon 3x - y + 4z - 15 = 0.$

Aufgabe 51

Zerlege die Geradengleichung in ihre Komponenten:

$x = -4 + 2t$, $y = -10 + 3t$ und $z = 8 - 2t$

setze diese Terme in die Koordinatengleichung ein:

$3 \cdot (-4 + 2t) - 1 \cdot (-10 + 3t) + 4 \cdot (8 - 2t) - 15 = 0$

und setze die Lösung $t = 3$ in die Geradengleichung ein: $S(2, -1, 2)$

Für den Winkel zwischen Gerade und Ebene Berechne den spitzen Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}_\varepsilon$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ der Geraden und ergänze das Resultat auf 90°:
$\angle(g, \varepsilon) = 13.76°$

Aufgabe 52

Berechne den spitzen Winkel, in dem die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Ebene $\varepsilon\colon x + 6y + z - 2 = 0$ schneidet.

Aufgabe 52

$$\angle(g, \varepsilon) = 38.74^\circ$$

Aufgabe 53

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(17, 8, -14)$ geht und senkrecht zur Ebene $\varepsilon\colon 2x - y + z + 5 = 0$ steht.

Aufgabe 53

Die Gerade soll durch den Punkt $P(17, 8, -14)$ gehen und senkrecht zur Ebene ε stehen. Letzteres bedeutet, dass der Normalenvektor der Ebene der Richtungsvektor der gesuchten Geraden ist:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 54

Gib eine Gleichung der Ebene δ an, die senkrecht zur Ebene $\varepsilon\colon 3x + 2y - z + 2 = 0$ steht und die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

enthält.

Aufgabe 54

$\delta\colon 3x - 8y - 7z + 1 = 0$

Aufgabe 55

Spiegle den Punkt $P(5, -2, 1)$ an der Ebene
$\varepsilon\colon x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Aufgabe 55

Zerlege die zu ε senkrechte Gerade durch P

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in ihre Komponenten:

$x = 5 + t$, $y = -2 - 2t$ und $z = 1 + 3t$

setze diese Terme in die Koordinatengleichung ein:

$1 \cdot (5 + t) - 2 \cdot (-2 - 2t) + 3 \cdot (1 + 3t) - 5 = 0$

und setze die verdoppelte Lösung $2t = -1$ in die Geradengleichung ein: $P'(4, 0, -2)$

Aufgabe 56

Bestimme eine Gleichung der Mittelnormalebene μ zur Strecke mit den Endpunkten $A(9, 8, -3)$ und $B(-5, 6, 7)$.

Aufgabe 56

Die Mittelnormalebene (MNE) ist diejenige Ebene, die normal (senkrecht) zur Strecke AB steht und durch ihren Mittelpunkt $M(2, 7, 2)$ geht.

Als Normalenvektoren der MNE können wir

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

verwenden. Der Rest der Prozedur sollte bekannt sein ...

$\mu\colon 7x + y - 5z - 11 = 0$

Aufgabe 57

Bestimme den spitzen Winkel zwischen den Ebenen
$\varepsilon\colon x + 4y + 2z + 2 = 0$ und $\delta\colon 3x - z + 5 = 0$.

Aufgabe 57

Der Winkel zwischen den Ebenen ist gleich gross wie der Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren:

$\angle(\varepsilon, \delta) = \angle(\vec{n}_\varepsilon, \vec{n}_\delta) = \cdots = 86.04^\circ$

Aufgabe 58

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen
ε: $6x - 9y + 3z - 15 = 0$ und $\delta\colon\ -4x + 6y - 2z + 10 = 0$.

Aufgabe 58

$$\varepsilon = \delta$$

Aufgabe 59

Zeige, dass die Ebenen $\varepsilon\colon 2x + 4y + 4z + 5 = 0$ und $\delta\colon x + 2y + 2z + 6 = 0$ parallel sind aber nicht zusammenfallen.

Aufgabe 59

- $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$ sind kollinear
- $\text{dist}(P, \varepsilon) \neq \text{dist}(P, \delta)$ für einen Testpunkt P, wie z. B. $(0, 0, 0)$

Aufgabe 60

Zeige, dass sich die beiden Ebenen $\varepsilon\colon 3x + 2y + z + 5 = 0$ und $\delta\colon 2x + y + 2z + 4 = 0$ schneiden, indem du eine Gleichung der Schnittgeraden s bestimmst.

Aufgabe 60

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden s steht senkrecht auf beiden Ebenen:

$$\vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für einen Anfangspunkt der Geraden wählen wir einen Punkt mit einfachen Koordinaten, der auf beiden Ebenen liegen soll. Zum Beispiel: $P(x, y, 0)$

Setze diese Koordinaten in die beiden Ebenengleichungen ein und versuche, das zugehörige Gleichungssystem zu lösen. Wenn es eine Lösung besitzt, haben wir einen Punkt der Schnittgeraden gefunden. Anderfalls setzt man eine der anderen beiden Koordinaten null. (Früher oder später wird man erfolgreich sein, da die Schnittgerade nicht zu allen Koordinatenebenen parallel sein kann.)

$$\varepsilon \cap \delta = s \text{ mit } s: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 61

Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden der Ebenen
$\varepsilon\colon 2x + y + 2z + 5 = 0$ und $\delta\colon 2x + 4y - 4z + 6 = 0$.

Aufgabe 61

$$\omega_1\colon x + y + 4z + 2 = 0$$

$$\omega_2\colon 3x + 3y + 8 = 0$$

Aufgabe 62

Gib die Koordinatengleichung der Sphäre S mit Mittelpunkt $M(3, -2, 4)$ und Radius $r = \sqrt{5}$ an.

Aufgabe 62

$$S\colon (x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=5$$

Aufgabe 63

Handelt es sich bei der Koordinatengleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 3 = 0$$

um die Gleichung einer Sphäre S? Wenn ja, gib Mittelpunkt M und Radius ϱ an.

Aufgabe 63

Mittelpunktsform (quadratisches Ergänzen):

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 3 = 0$

$(x^2 - 2)^2 + (y^2 - 4)^2 + (z^2 + 1)^2 = 18$

$M(2, 4, -1)$, $\varrho = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Aufgabe 64

Liegt der Punkt $P(-2, 3, 7)$ innerhalb, ausserhalb oder auf der Sphäre mit der Gleichung

$S\colon (x-3)^2 + (y+1)^2 + (x-6)^2 = 40$?

Aufgabe 64

$$M = (3, 1, -6)$$

Aufgabe 64

$$M = (3, 1, -6)$$

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-(-1) \\ 7-6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 25 + 16 + 1 = 42$$

Wegen $\left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = 42 > 40$ liegt P ausserhalb der Sphäre.

Aufgabe 65

Gegeben:

- Gerade g durch die Punkte $A(0, 6, 2)$ und $B(1, 7, 3)$
- Sphäre S mit Mittelpunkt $M(2, 8, 1)$ und Radius $\varrho = 3\sqrt{2}$

Gesucht: allfällige Schnittpunkte von g und K

Aufgabe 65

$\overrightarrow{AB} = (1,1,1)^T$; $x = t$, $y = 6 + t$, $z = 2 + t$

Aufgabe 65

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,1)^T;\ x = t,\ y = 6+t,\ z = 2+t$$

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 &= 18 \\
(t-2)^2 + (t-2)^2 + (t+1)^2 &= 18 \\
3t^2 - 6t + 9 &= 18 \\
t^2 - 2t - 3 &= 0 \\
(t+1)(t-3) &= 0
\end{aligned}$$

$$t_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad P_1(-1,5,1)$$

$$t_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad P_2(3,9,5)$$

Aufgabe 66

Gegeben:

- Sphäre $S\colon (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=49$
- Ebene $\varepsilon\colon 3x+2y-6z=0$

Gesucht: Tangentialebenen an S, die parallel zu ε sind.

Aufgabe 66

$\vec{n}_\varepsilon = (3, 2, -6)^T;\ M(3, 1, -2)$

Aufgabe 66

$\vec{n}_\varepsilon = (3, 2, -6)^T$; $M(3, 1, -2)$

Komponenten der Gerade g durch M normal zu ε:

Aufgabe 66

$\vec{n}_\varepsilon = (3, 2, -6)^T$; $M(3, 1, -2)$

Komponenten der Gerade g durch M normal zu ε:

$x = 3 + 3t$, $y = 1 + 2t$, $z = -2 - 6t$

Aufgabe 66

$\vec{n}_\varepsilon = (3, 2, -6)^T$; $M(3, 1, -2)$

Komponenten der Gerade g durch M normal zu ε:

$x = 3 + 3t$, $y = 1 + 2t$, $z = -2 - 6t$

$$
\begin{aligned}
(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 &= 49 \\
(3t)^2 + (2t)^2 + (-6t)^2 &= 49 \\
49t^2 &= 49 \\
t_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(6, 3, -8) \\
t_2 &= -1 \quad \Rightarrow \quad P_2(0, -1, 4)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 66

$\vec{n}_\varepsilon = (3, 2, -6)^T;\ M(3, 1, -2)$

Komponenten der Gerade g durch M normal zu ε:

$x = 3 + 3t,\ y = 1 + 2t,\ z = -2 - 6t$

$$
\begin{aligned}
(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 &= 49 \\
(3t)^2 + (2t)^2 + (-6t)^2 &= 49 \\
49t^2 &= 49 \\
t_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(6, 3, -8) \\
t_2 &= -1 \quad \Rightarrow \quad P_2(0, -1, 4)
\end{aligned}
$$

$\delta_1 :\ \vec{n}_\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}_{P_1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 : 3x + 2y - 6z - 72 = 0$

Aufgabe 66

$\vec{n}_\varepsilon = (3, 2, -6)^T$; $M(3, 1, -2)$

Komponenten der Gerade g durch M normal zu ε:

$x = 3 + 3t,\ y = 1 + 2t,\ z = -2 - 6t$

$$\begin{aligned}
(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 &= 49 \\
(3t)^2 + (2t)^2 + (-6t)^2 &= 49 \\
49t^2 &= 49 \\
t_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(6, 3, -8) \\
t_2 &= -1 \quad \Rightarrow \quad P_2(0, -1, 4)
\end{aligned}$$

$$\delta_1 : \vec{n}_\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}_{P_1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 : 3x + 2y - 6z - 72 = 0$$

$$\delta_2 : \vec{n}_\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}_{P_2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 : 3x + 2y - 6z + 26 = 0$$

Aufgabe 67

Die Sphäre $S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 22z - 103 = 0$ schneidet die Ebene $\varepsilon\colon 2x + 2y - z - 18 = 0$ in einem Kreis. Bestimme Mittelpunkt Z und Radius r dieses Kreises.

Aufgabe 67

Mittelpunktsform: (quadratisches Ergänzen)

Aufgabe 67

Mittelpunktsform: (quadratisches Ergänzen)

$$K: (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-11)^2 = 103 + 1 + 121 = 225$$

Aufgabe 67

Mittelpunktsform: (quadratisches Ergänzen)

$K: (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-11)^2 = 103 + 1 + 121 = 225$

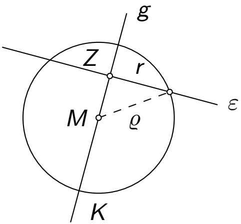
$M(0, 1, 11)$, $\varrho = 15$

Aufgabe 67

Mittelpunktsform: (quadratisches Ergänzen)

$$K: (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-11)^2 = 103 + 1 + 121 = 225$$

$$M(0,1,11),\ \varrho = 15$$



Gerade g durch M mit Richtungsvektor $\vec{n}_\varepsilon = (2, 2, -1)^T$:

Gerade g durch M mit Richtungsvektor $\vec{n}_\varepsilon = (2, 2, -1)^T$:

$x = 0 + 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = 11 - t$

Gerade g durch M mit Richtungsvektor $\vec{n}_\varepsilon = (2,2,-1)^T$:

$x = 0 + 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = 11 - t$

$g \cap \varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
2x + 2y - z - 18 &= 0 \\
2(0+2t) + 2(1+2t) - (11-t) - 18 &= 0 \\
9t - 27 &= 0 \\
t &= 3
\end{aligned}
$$

Zentrum des Schnittkreises: $Z(6,7,8)$

Gerade g durch M mit Richtungsvektor $\vec{n}_\varepsilon = (2, 2, -1)^T$:

$x = 0 + 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = 11 - t$

$$
\begin{aligned}
g \cap \varepsilon: \qquad\qquad 2x + 2y - z - 18 &= 0 \\
2(0 + 2t) + 2(1 + 2t) - (11 - t) - 18 &= 0 \\
9t - 27 &= 0 \\
t &= 3
\end{aligned}
$$

Zentrum des Schnittkreises: $Z(6, 7, 8)$

$\overrightarrow{MZ} = (6, 6, -3)^T \quad \Rightarrow \quad MZ = 9$

Gerade g durch M mit Richtungsvektor $\vec{n}_\varepsilon = (2, 2, -1)^T$:

$x = 0 + 2t,\ y = 1 + 2t,\ z = 11 - t$

$g \cap \varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
2x + 2y - z - 18 &= 0 \\
2(0 + 2t) + 2(1 + 2t) - (11 - t) - 18 &= 0 \\
9t - 27 &= 0 \\
t &= 3
\end{aligned}
$$

Zentrum des Schnittkreises: $Z(6, 7, 8)$

$\overrightarrow{MZ} = (6, 6, -3)^T \quad \Rightarrow \quad MZ = 9$

$r = \sqrt{\varrho^2 - MZ^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$

Aufgabe 68

Gegeben:

- Sphäre $S\colon (x-1)^2+(y-7)^2+(z-2)^2=6$
- Gerade $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gesucht: Tangentialebenen τ an S mit $g \subset \tau$

Aufgabe 68

Ein Berührpunkt B muss folgende Gleichungen erfüllen

$$\begin{aligned}
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right) &= \varrho^2 \quad (1)\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\vec{v} &= 0 \quad (2)\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_A - \vec{r}_M\right) &= \varrho^2 \quad (3)
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (1) ist die Gleichung der Sphäre in Skalarproduktform
- (3) erhält man durch cleveres Umformen von $\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) = 0$

$M(1,7,2)$, $\varrho = \sqrt{6}$, $\vec{v} = (2,4,1)^T$, $\overrightarrow{MA} = (2,-2,-2)$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 6 \quad (1)$$

$$2(x-1) + 4(y-7) + (z-2) = 0 \quad (2)$$

$$2(x-1) - 2(y-7) - 2(z-2) = 0 \quad (3)$$

$M(1,7,2)$, $\varrho = \sqrt{6}$, $\vec{v} = (2,4,1)^T$, $\overrightarrow{MA} = (2,-2,-2)$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 6 \quad (1)$$

$$2(x-1) + 4(y-7) + (z-2) = 0 \quad (2)$$

$$2(x-1) - 2(y-7) - 2(z-2) = 0 \quad (3)$$

$$2x + 4y + z = 32 \qquad (2)$$

$$2x - 2y - 2z = -16 \quad (3)$$

$M(1,7,2)$, $\varrho = \sqrt{6}$, $\vec{v} = (2,4,1)^T$, $\overrightarrow{MA} = (2,-2,-2)$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 6 \quad (1)$$

$$2(x-1) + 4(y-7) + (z-2) = 0 \quad (2)$$

$$2(x-1) - 2(y-7) - 2(z-2) = 0 \quad (3)$$

$$2x + 4y + z = 32 \qquad (2)$$

$$2x - 2y - 2z = -16 \quad (3)$$

x eliminieren: $6y + 3z = 48 \quad \Rightarrow \quad y = 8 - z/2$

$M(1,7,2)$, $\varrho = \sqrt{6}$, $\vec{v} = (2,4,1)^T$, $\overrightarrow{MA} = (2,-2,-2)$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 6 \quad (1)$$

$$2(x-1) + 4(y-7) + (z-2) = 0 \quad (2)$$

$$2(x-1) - 2(y-7) - 2(z-2) = 0 \quad (3)$$

$$2x + 4y + z = 32 \qquad (2)$$

$$2x - 2y - 2z = -16 \quad (3)$$

x eliminieren: $6y + 3z = 48 \quad \Rightarrow \quad y = 8 - z/2$

y eliminieren: $6x - 3z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z/2$

$M(1,7,2)$, $\varrho = \sqrt{6}$, $\vec{v} = (2,4,1)^T$, $\overrightarrow{MA} = (2,-2,-2)$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 6 \quad (1)$$

$$2(x-1) + 4(y-7) + (z-2) = 0 \quad (2)$$

$$2(x-1) - 2(y-7) - 2(z-2) = 0 \quad (3)$$

$$2x + 4y + z = 32 \qquad (2)$$

$$2x - 2y - 2z = -16 \quad (3)$$

x eliminieren: $6y + 3z = 48 \quad \Rightarrow \quad y = 8 - z/2$

y eliminieren: $6x - 3z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z/2$

in (1) einsetzen und nach z auflösen:

$M(1,7,2)$, $\varrho = \sqrt{6}$, $\vec{v} = (2,4,1)^T$, $\overrightarrow{MA} = (2,-2,-2)$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 6 \quad (1)$$
$$2(x-1) + 4(y-7) + (z-2) = 0 \quad (2)$$
$$2(x-1) - 2(y-7) - 2(z-2) = 0 \quad (3)$$

$$2x + 4y + z = 32 \qquad (2)$$
$$2x - 2y - 2z = -16 \quad (3)$$

x eliminieren: $6y + 3z = 48 \quad \Rightarrow \quad y = 8 - z/2$

y eliminieren: $6x - 3z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z/2$

in (1) einsetzen und nach z auflösen:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{z}{2} - 1\right)^2 + \left(1 - \tfrac{z}{2}\right)^2 + \left(z - 2\right)^2 &= 6 \\
\tfrac{3}{2}z^2 - 6z + 6 &= 6 \\
z^2 - 4z &= 0 \\
z_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad B_1(0,8,0) \\
z_2 &= 4 \quad \Rightarrow \quad B_2(2,6,4)
\end{aligned}$$