

Aufgabe 1

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Berechne $\vec{v} = 7\vec{a} - 3\vec{b}$.

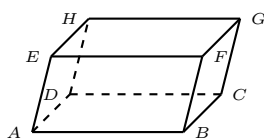
Aufgabe 2

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Löse die Gleichung $2\vec{a} - 3\vec{v} + 0.5\vec{b} = \vec{c}$ nach \vec{v} auf.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Ecken $A(-2, 3, 1)$, $B(4, 5, 7)$, $D(-1, 4, 2)$ und $E(6, 2, 10)$ eines Spats. Bestimme die Koordinaten der übrigen Ecken C , F , G und H .

**Aufgabe 4**

Spiegle den Punkt $P(5, 4, -3)$

- (a) an der xz -Ebene,
- (b) an der y -Achse,
- (c) am Ursprung,
- (d) am Punkt $Z(7, 2, 1)$.

Aufgabe 5

Bestimme den Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten $A(-2, 3, 1)$ und $B(4, 5, 7)$.

Aufgabe 6

Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks mit $A(7, 2, 8)$, $B(3, -5, 1)$ und $C(-4, 0, 6)$.

Aufgabe 7

Bestimme den Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken $A(6, 5, -4)$, $B(3, 0, 11)$, $C(-9, -1, 2)$ und $D(8, -12, 1)$.

Aufgabe 8

Prüfe, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgabe 9

Zerlege $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$ nach den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 10

Berechne die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11

Berechne den Abstand der Punkte $A(11, -1, 9)$ und $B(2, 1, 3)$.

Aufgabe 12

Bestimme alle Vektoren der Länge 9, die kollinear zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

Aufgabe 13

Berechne $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Aufgabe 15

Zerlege den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \\ 29 \end{pmatrix}$ in eine Komponente $\vec{b}_{\parallel a}$ parallel zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und in eine Komponente $\vec{b}_{\perp a}$ senkrecht zu \vec{a} .

Aufgabe 16

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 17

Bestimme einen Vektor, der orthogonal zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht.

Aufgabe 18

Welchen Flächeninhalt hat das durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm?

Aufgabe 19

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit $A(-2, 1, 3)$, $B(3, 5, 6)$ und $C(-1, 5, 2)$.

Aufgabe 20

Berechne das Volumen des Spats, der durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 21

Berechne das Volumen des Tetraeders mit den Ecken $A(1, 0, 2)$, $B(2, 3, 4)$, $C(3, 2, 5)$ und $D(4, 4, 6)$.

Aufgabe 22

Untersuche, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ komplanar sind.

Aufgabe 23

Stelle eine Gleichung der Geraden durch die Punkte $A(3, -2, 5)$ und $B(4, 1, 7)$ auf.

Aufgabe 24

Liegt der Punkt $P(13, 1, -10)$ auf der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 25

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(7, 6, 3)$ geht und parallel zur Geraden $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Aufgabe 26

Bestimme alle Spurpunkte der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 27

Bestimme den Abstand des Punktes $P(0, 3, 7)$ von der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28

Bestimme den Abstand der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 31

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33

Zeige, dass sich die Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne den Schnittpunkt sowie den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 34

Bestimme eine Gleichung der Geraden h , die orthogonal zur Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht und durch den Punkt $P(5, 8, 1)$ geht.

Aufgabe 35

Zeige, dass sich die beiden Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

schneiden und bestimme Gleichungen ihrer Winkelhalbierenden.

Aufgabe 36

Bestimme eine Parametergleichung der Ebene ε , die durch die Punkte $A(5, -3, 4)$, $B(7, 1, 5)$ und $C(9, 0, 3)$ definiert ist.

Aufgabe 37

Bestimme eine Parametergleichung der Ebene ε , die durch den Punkt $P(2, 3, -4)$, und die Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ definiert ist.}$$

Aufgabe 38

Untersuche, ob der Punkt $P(5, 5, 5)$ in der Ebene

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ liegt.}$$

Aufgabe 39

Gib eine Parametergleichung der Ebene δ an, die parallel zur Ebene

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

liegt und durch den Punkt $P(7, -4, 6)$ geht.

Aufgabe 40

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit der Ebene

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41

Stelle die Ebene $\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der Koordinatenform dar.

Aufgabe 42

Stelle die Ebene $\varepsilon: x - 3y + 2z - 10 = 0$ in der Parameterform dar.

Aufgabe 43

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die Punkte $A(9, -3, -1)$, $B(5, 0, 1)$ und $C(2, 6, 7)$ definiert wird.

Aufgabe 44

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt $P(-1, 3, 5)$ und die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmt wird.

Aufgabe 45

Untersuche, ob der Punkt $P(9, 5, -1)$ in der Ebene $\varepsilon: 2x - 3y + 4z + 1 = 0$ liegt.

Aufgabe 46

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ , die parallel zur Ebene $\varepsilon: 3x + 7y + z - 2 = 0$ liegt und durch den Punkt $P(4, 4, 4)$ geht.

Aufgabe 47

Berechne den Abstand des Punktes $P(1, 2, 3)$ von der Ebene $\varepsilon: 9x + 12y + 20z + 15 = 0$.

Aufgabe 48

Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene $\varepsilon: 3x - y + 2z + 12 = 0$

Aufgabe 49

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebene $\varepsilon: 3x + y - 2z + 12 = 0$ und der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 50

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebene $\varepsilon: 2x - 2y - z + 17 = 0$ und der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 51

Berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit der Ebene } \varepsilon: 3x - y + 4z - 15 = 0.$$

Aufgabe 52

Berechne den spitzen Winkel, in dem die Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Ebene $\varepsilon: x + 6y + z - 2 = 0$ schneidet.

Aufgabe 53

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(17, 8, -14)$ geht und senkrecht zur Ebene $\varepsilon: 2x - y + z + 5 = 0$ steht.

Aufgabe 54

Gib eine Gleichung der Ebene δ an, die senkrecht zur Ebene $\varepsilon: 3x + 2y - z + 2 = 0$ steht

und die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ enthält.

Aufgabe 55

Spiegle den Punkt $P(5, -2, 1)$ an der Ebene $\varepsilon: x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Aufgabe 56

Bestimme eine Gleichung der Mittelnormalebene μ zur Strecke mit den Endpunkten $A(9, 8, -3)$ und $B(-5, 6, 7)$.

Aufgabe 57

Bestimme den spitzen Winkel zwischen den Ebenen $\varepsilon: x + 4y + 2z + 2 = 0$ und $\delta: 3x - z + 5 = 0$.

Aufgabe 58

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen $\varepsilon: 6x - 9y + 3z - 15 = 0$ und $\delta: -4x + 6y - 2z + 10 = 0$.

Aufgabe 59

Zeige, dass die Ebenen $\varepsilon: 2x + 4y + 4z + 5 = 0$ und $\delta: x + 2y + 2z + 6 = 0$ parallel sind aber nicht zusammenfallen.

Aufgabe 60

Zeige, dass sich die beiden Ebenen $\varepsilon: 3x + 2y + z + 5 = 0$ und $\delta: 2x + y + 2z + 4 = 0$ schneiden, indem du eine Gleichung der Schnittgeraden s bestimmst.

Aufgabe 61

Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden der Ebenen $\varepsilon: 2x + y + 2z + 5 = 0$ und $\delta: 2x + 4y - 4z + 6 = 0$.

Aufgabe 62

Gib die Koordinatengleichung der Sphäre S mit Mittelpunkt $M(3, -2, 4)$ und Radius $r = \sqrt{5}$ an.

Aufgabe 63

Handelt es sich bei der Koordinatengleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 3 = 0$$

um die Gleichung einer Sphäre S ? Wenn ja, gib Mittelpunkt M und Radius ϱ an.

Aufgabe 64

Liegt der Punkt $P(-2, 3, 7)$ innerhalb, ausserhalb oder auf der Sphäre mit der Gleichung $S: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 6)^2 = 40$?

Aufgabe 65

Gegeben:

- Gerade g durch die Punkte $A(0, 6, 2)$ und $B(1, 7, 3)$
- Sphäre S mit Mittelpunkt $M(2, 8, 1)$ und Radius $\varrho = 3\sqrt{2}$

Gesucht: allfällige Schnittpunkte von g und S

Aufgabe 66

Gegeben:

- Sphäre $S: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 49$
- Ebene $\varepsilon: 3x + 2y - 6z = 0$

Gesucht: Tangentialebenen an S , die parallel zu ε sind.

Aufgabe 67

Die Sphäre $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 22z - 103 = 0$ schneidet die Ebene $\varepsilon: 2x + 2y - z - 18 = 0$ in einem Kreis. Bestimme Mittelpunkt Z und Radius r dieses Kreises.

Aufgabe 68

Gegeben:

- Sphäre $S: (x - 1)^2 + (y - 7)^2 + (z - 2)^2 = 6$
- Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gesucht: Tangentialebenen τ an S mit $g \subset \tau$