Stochastik (diskrete Zufallsvariablen) Lösungen+ Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

$P(w) = 0.6$, $P(z) = 0.4$ und $X(w) = 3$, $X(z) = 8$

(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x	3	8
$P(X = x)$	0.6	0.4

(b) Erwartungswert von X

$\mathrm{E}(X) = 3 \cdot 0.6 + 8 \cdot 0.4 = 1.8 + 3.2 = 5$

(b) Varianz von X

$\mathrm{Var}(X) = (3-5)^2 \cdot 0.6 + (8-5)^2 \cdot 0.4 = 4 \cdot 0.6 + 9 \cdot 0.4 = 2.4 + 3.6 = 6$

Aufgabe 2

ω	a	b	c	d	e
$P(\omega)$	0.1	0.2	0.1	0.4	?

ω	a	b	c	d	e
$X(\omega)$	2	1	0	1	2

(a) $P(e) = 0.2$

(b) Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.1	0.6	0.3

(c)
- $P(X \leq 1) = 0.1 + 0.6 = 0.7$
- $P(X > 2) = 0$
- $P(X \text{ ist gerade}) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

(d) $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.3 = 1.2$

(e)
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= (0-1.2)^2 \cdot 0.1 + (1-1.2)^2 \cdot 0.6 + (2-1.2)^2 \cdot 0.3 \\ &= 1.44 \cdot 0.1 + 0.04 \cdot 0.6 + 0.64 \cdot 0.3 = 0.36\end{aligned}$$

Aufgabe 3

x	$P(X = x)$
0	$0.4^3 = 0.064$
1	$3 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6 = 0.288$
2	$3 \cdot 0.4 \cdot 0.6^2 = 0.432$
3	$0.6^3 = 0.216$

$E(X) = 0 \cdot 0.064 + 1 \cdot 0.288 + 2 \cdot 0.432 + 3 \cdot 0.216 = 1.8$

Für binomisch verteilte Zufallsvariablen gibt es diese Formel: $\mathrm{E}(x) = n \cdot p = 3 \cdot 0.6 = 1.8$

Aufgabe 4

X: der (zufällige) Gewinn (oder Verlust) in Franken

x	$\{X = x\}$	$P(X = x)$
1	12, 21, ..., 16, 61	$\frac{10}{36}$
2	23, 32, ..., 26, 62	$\frac{8}{36}$
3	34, 43, ..., 36, 63	$\frac{6}{36}$
4	45, 54, 46, 64	$\frac{4}{36}$
5	56, 65	$\frac{2}{36}$
-12	11, 22, ..., 66	$\frac{6}{36}$

$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 6 \cdot 12}{36} = -\dfrac{1}{18} \approx -0.056$

Das Spiel lohnt sich nicht, da man pro Spiel im Mittel etwa 5.6 Rappen verliert.

Aufgabe 5

X: die Nummer der Ziehung mit der der ersten roten Karte

x	$\{X = x\}$	$P(X = x)$
1	r	$\frac{3}{6} = \frac{60}{120}$
2	b, r	$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{30} = \frac{36}{120}$
3	b, b, r	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{120}$
4	b, b, b, r	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{6}{120}$

$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{3}{20} + 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{7}{4} = 1.75$

Es muss im Mittel 1.75 Mal gezogen werden.