Definitionen

- Eine *Zufallsvariable* (Synonym: *Zufallsgrösse*) X ist eine Funktion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ zuordnet.
- Die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* einer Zufallsvariablen X ist die Funktion

  $P\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

  welche jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit

  $P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x\}) = P(X = x)$

  zuordnet.
- Der *Erwartungswert* einer Zufallsvariablen X ist $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_x x \cdot P(X = x)$.

  Der Erwartungswert gibt den durchschnittlichen Wert der Zufallsvariablen an, wenn man das Zufallsexperiment unbegrenzt wiederholt.
- Die *Varianz* einer Zufallsvariablen X ist $\mathrm{Var}(X) = \sum\limits_x (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P(X = x)$.

  Die Varianz gibt, an, wie gross die durchschnittliche quadratische Abweichung der Werte der Zufallsvariablen vom Erwartungswert ist, wenn man das Zufallsexperiment unbegrenzt wiederholt.

Aufgabe 1

Eine unfaire Münze mit den zwei Seiten *Wappen* (w) und *Zahl* (z) zeigt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ *Wappen.* Die Zufallsvariable X ordnet den beiden Ereignissen willkürlich die Werte $w \to 3$ und $z \to 8$ zu.

(a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X tabellarisch dar.

(b) Berechne den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ von X.

(b) Berechne die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von X.

Aufgabe 2

Ein Zufallsexperiment mit $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ hat die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

ω	a	b	c	d	e
$P(\omega)$	0.1	0.2	0.1	0.4	?

Ferner ist auf Ω die Zufallsvariable X definiert:

ω	a	b	c	d	e
$X(\omega)$	2	1	0	1	2

(a) Bestimme $P(e)$.

(b) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X tabellarisch dar.

(c) Bestimme $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$ und $P(X \text{ ist gerade})$.

(d) Berechne den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ von X.

(e) Berechne die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von X.

Aufgabe 3

Ein Sportschütze gibt wiederholt 3 Schüsse auf ein Ziel ab. Erfahrungsgemäss trifft er bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 0.6.

Wie hoch ist die durchschnittliche Trefferzahl in solchen Dreierserien, wenn die einzelnen Schüsse unabhängig voneinander sind.

Aufgabe 4

Es wird folgendes Glücksspiel angeboten: ein fairer Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Sind die Augenzahlen verschieden, dann erhält man die kleinere der beiden Augenzahlen in Franken als Gewinn ausbezahlt. Sind die Augenzahlen gleich, muss man 12 Franken bezahlen.

Lohnt sich dieses Spiel auf lange Sicht?

Aufgabe 5

Von sechs Spielkarten sind drei auf einer Seite rot und die übrigen auf einer Seite blau bemalt. Die Rückseiten aller Karten haben dasselbe Sujet.

Die Karten werden gemischt und mit der Rückseite nach oben auf den Tisch gelegt. Dann wird ohne Zurücklegen eine Karte nach der anderen gezogen.

Wie oft muss man im Mittel ziehen, bis man die erste rote Karte aufgenommen hat?