Stochastik

Übungen

Aufgabe 1.1

Gegeben: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ und $A = \{1,3,5\}$,
$B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{2,4,7\}$

Bestimme

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A \cap C$

(d) $B \setminus A$

(e) $C \setminus B$

(f) $\overline{B}$

Aufgabe 1.1

(a) $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(b) $A \cap B = \{5\}$

(c) $A \cap C = \{\,\}$

(d) $B \setminus A = \{4, 6, 7\}$

(e) $C \setminus B = \{2\}$

(f) $\overline{B} = \Omega \setminus B = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

Aufgabe 1.2

Die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ sind Teilmenge der Grundmenge $\Omega = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Bestimme damit:

(a) $\overline{A}$

(b) $\overline{B}$

(c) $A \setminus B$

(d) $B \setminus A$

(d) $A \setminus C$

(c) $C \setminus A$

(e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(f) $\overline{A \cup B}$

(g) $\overline{A} \cup \overline{B}$

(h) $\overline{A} \cap \overline{B}$

Aufgabe 1.2

(a) $\overline{A} = \{6, 7, 8, 9\}$

(b) $\overline{B} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

(c) $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$

(d) $B \setminus A = \{6, 7\}$

(d) $A \setminus C = \{1, 2\}$

(c) $C \setminus A = \emptyset$

(e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$

(f) $\overline{A \cup B} = \{8, 9\}$

(g) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

(h) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{8, 9\}$

Aufgabe 1.3

Gegeben ist $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3\}$. Bestimme

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

(c) B^2

(d) $(A \times B) \setminus (B \times A)$

(e) $(A \times A) \setminus (B \times B)$

Aufgabe 1.3

(a) $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

(b) $B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

(c) $B^2 = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

(d) $(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(1,2),(1,3)\}$

(e) $(A \times A) \setminus (B \times B) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$

Aufgabe 1.4

Bestimme die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ der gegebenen Menge M. (Die Potenzmenge von M ist die Menge aller Teilmengen von M.)

(a) $M = \{1, 2\}$

(b) $M = \{\,\}$

(c) $M = \{a, b, c\}$

Aufgabe 1.4

(a) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

(b) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$

(c) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$

Aufgabe 1.5

Wie viele Teilmengen hat eine Menge

(a) mit 4 Elementen,

(b) mit 10 Elementen,

(c) mit n Elementen?

Aufgabe 1.5

(a) $2^4 = 16$ Teilmengen

(b) $2^{10} = 1024$ Teilmengen

(c) 2^n Teilmengen

Aufgabe 1.6

Beweise: Aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$.

Aufgabe 1.6

Zu zeigen ist, dass für jedes $x \in A$ folgt, dass $x \in C$.

Sei nun $x \in A$ beliebig

Wegen $A \subset B$ folgt $x \in B$

Wegen $B \subset C$ folgt $x \in C$

Somit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Aufgabe 1.7

Zeige mit einem Gegenbeispiel, dass aus $A \cap B = A \cap C$ im Allgemeinen nicht $B = C$ folgt.

Aufgabe 1.7

Mit $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ und $C = \{2, 4\}$ gilt:

$A \cap B = \{2\} = A \cap C$ aber $B \neq C$

Aufgabe 1.8

Beweise: Sind A und B Teilmengen einer Grundmenge Ω, so gilt $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Aufgabe 1.8

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in (\Omega \setminus B)\} \\ &= \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in \overline{B}\} \\ &= A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.9

Illustriere die Regeln von De Morgan

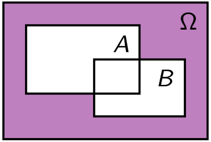
(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

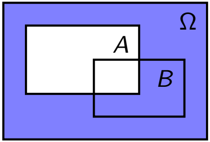
mit einem Venn-Diagramm.

Aufgabe 1.9

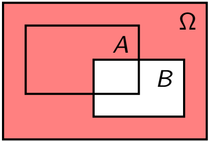
(a) $\overline{A \cup B}$



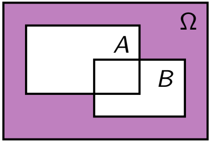
$\overline{A}$



$\overline{B}$



$\overline{A} \cap \overline{B}$



Aufgabe 1.10

Welche der Mengen sind endlich, welche abzählbar unendlich und welche überabzählbar?

(a) $A = \{x \mid x \text{ ist die Anzahl der Kantone der Schweiz}\}$

(b) $B = \{x \mid x \text{ ist Ziffer in der Dezimalentwicklung von } \pi\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \colon 0.1 < x < 0.2\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ ein Vielfaches von } 17\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} \colon x \text{ ist ein ganzzahliger Teiler von } 12\}$

(f) $F = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon P \text{ ist ein Punkt auf dem Einheitskreis}\}$

Aufgabe 1.10

(a) A ist endlich

(b) B ist endlich

(c) C ist überabzählbar unendlich

(d) D ist abzählbar unendlich

(e) E ist endlich

(f) F ist endlich

Aufgabe 1.11

In einer Umfrage wurden 70 Personen befragt

- 24 lesen Zeitung A
- 31 lesen Zeitung B
- 19 lesen Zeitung C
- 7 lesen Zeitung A und B
- 3 lesen Zeitung B und C
- 5 lesen Zeitung C und A
- 2 Personen lesen alle drei Zeitungen

(a) Wie viele Befragte lesen mindestens eine der drei Zeitungen?

(b) Wie viele Befragte lesen keine der drei Zeitungen?

(c) Wie viele Befragte lesen genau eine der drei Zeitungen?

Aufgabe 1.11

Die $|G| = 70$ befragten Personen können keine, eine, zwei oder drei der Zeitungen lesen, nach denen gefragt wurden.

(a) Mindestens eine der drei Zeitungen:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ + |A \cap B \cap C| \\ = 24 + 31 + 19 - 7 - 3 - 5 + 2 = 61 \end{aligned}$$

(b) Keine der drei Zeitungen:

$|G| - |A \cup B \cup C| = 70 - 61 = 9$

(c) Genau eine der drei Zeitungen:

$$|A \cup B \cup C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - 2|A \cap B \cap C|)$$
$$= 61 - (7 + 3 + 5 - 2 \cdot 2) = 61 - 11 = 50$$

Aufgabe 2.1

Beschreibe den Stichprobenraum der folgenden Zufallsexperimente in aufzählender Form, d.h. $\Omega = \{\dots\}$. Es können sinnvolle Abkürzungen verwendet werden (z. B. Z für Zahl).

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.

(c) In einer Urne liegen zwei schwarze, zwei weisse und eine rote Kugel. Es werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.

(d) Zwei gleich aussehende Spielwürfel werden geworfen.

(e) Ein Spielwürfel wird so lange geworfen, bis erstmals die Augenzahl 5 erscheint.

Aufgabe 2.1

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.
$\Omega = \{(t,t),(t,\bar{t}),(\bar{t},t),(\bar{t},\bar{t})\}$
(t = Treffer, $\bar{t}$ = kein Treffer)

Aufgabe 2.1

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.
$\Omega = \{(t,t),(t,\overline{t}),(\overline{t},t),(\overline{t},\overline{t})\}$
(t = Treffer, $\overline{t}$ = kein Treffer)

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.

Aufgabe 2.1

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.
$\Omega = \{(t,t),(t,\bar{t}),(\bar{t},t),(\bar{t},\bar{t})\}$
(t = Treffer, $\bar{t}$ = kein Treffer)

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
$\Omega = \{www, wwz, wzw, wzz, zww, zwz, zzw, zzz\}$
(w = Wappen, z = Zahl)

Aufgabe 2.1

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.
$\Omega = \{(t,t),(t,\bar{t}),(\bar{t},t),(\bar{t},\bar{t})\}$
(t = Treffer, $\bar{t}$ = kein Treffer)

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
$\Omega = \{www, wwz, wzw, wzz, zww, zwz, zzw, zzz\}$
(w = Wappen, z = Zahl)

(c) In einer Urne liegen zwei schwarze, zwei weisse und eine rote Kugel. Es werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.

Aufgabe 2.1

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.
$\Omega = \{(t,t),(t,\bar{t}),(\bar{t},t),(\bar{t},\bar{t})\}$
($t =$ Treffer, $\bar{t} =$ kein Treffer)

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
$\Omega = \{www, wwz, wzw, wzz, zww, zwz, zzw, zzz\}$
($w =$ Wappen, $z =$ Zahl)

(c) In einer Urne liegen zwei schwarze, zwei weisse und eine rote Kugel. Es werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.
$\Omega = \{ss, sr, sw, ws, wr, ww, rs, rw\}$
($s =$ schwarz, $r =$ rot, $w =$ weiss)

Aufgabe 2.1

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.
$\Omega = \{(t, t), (t, \bar{t}), (\bar{t}, t), (\bar{t}, \bar{t})\}$
(t = Treffer, $\bar{t}$ = kein Treffer)

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
$\Omega = \{www, wwz, wzw, wzz, zww, zwz, zzw, zzz\}$
(w = Wappen, z = Zahl)

(c) In einer Urne liegen zwei schwarze, zwei weisse und eine rote Kugel. Es werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.
$\Omega = \{ss, sr, sw, ws, wr, ww, rs, rw\}$
(s = schwarz, r = rot, w = weiss)

(d)
$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6)\}$$

Aufgabe 2.1

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.
$\Omega = \{(t,t),(t,\bar{t}),(\bar{t},t),(\bar{t},\bar{t})\}$
(t = Treffer, $\bar{t}$ = kein Treffer)

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
$\Omega = \{www, wwz, wzw, wzz, zww, zwz, zzw, zzz\}$
(w = Wappen, z = Zahl)

(c) In einer Urne liegen zwei schwarze, zwei weisse und eine rote Kugel. Es werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.
$\Omega = \{ss, sr, sw, ws, wr, ww, rs, rw\}$
(s = schwarz, r = rot, w = weiss)

(d) $$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),\\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),\\ (3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$$

(e) Ein Spielwürfel wird so lange geworfen, bis erstmals die Augenzahl 5 erscheint.

Aufgabe 2.1

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.
$\Omega = \{(t,t),(t,\bar{t}),(\bar{t},t),(\bar{t},\bar{t})\}$
(t = Treffer, $\bar{t}$ = kein Treffer)

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
$\Omega = \{www, wwz, wzw, wzz, zww, zwz, zzw, zzz\}$
(w = Wappen, z = Zahl)

(c) In einer Urne liegen zwei schwarze, zwei weisse und eine rote Kugel. Es werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.
$\Omega = \{ss, sr, sw, ws, wr, ww, rs, rw\}$
(s = schwarz, r = rot, w = weiss)

(d) $$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),\\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),\\ (3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$$

(e) Ein Spielwürfel wird so lange geworfen, bis erstmals die Augenzahl 5 erscheint.

Aufgabe 2.2

Gegeben ist ein Zufallsexperiment. Formuliere zum Ereignis E das Gegenereignis $\overline{E}$.

(a) Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen.

E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

(b) Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen.

E: Es liegt mindestens einmal *Wappen* oben.

(c) Ein Auto muss nacheinander zwei zufällig geschaltete Ampeln (grün, orange, rot) passieren.

E: Das Auto passiert beide Ampeln bei „grün“.

Aufgabe 2.2

(a) E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

Aufgabe 2.2

(a) E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt zweimal oder gar nicht *Wappen* oben.

Aufgabe 2.2

(a) E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt zweimal oder gar nicht *Wappen* oben.

(b) E: Es liegt mindestens einmal *Wappen* oben.

Aufgabe 2.2

(a) E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt zweimal oder gar nicht *Wappen* oben.

(b) E: Es liegt mindestens einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt kein *Wappen* oben.

Aufgabe 2.2

(a) E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt zweimal oder gar nicht *Wappen* oben.

(b) E: Es liegt mindestens einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt kein *Wappen* oben.

(c) E: Das Auto passiert beide Ampeln bei „grün“.

Aufgabe 2.2

(a) E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt zweimal oder gar nicht *Wappen* oben.

(b) E: Es liegt mindestens einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt kein *Wappen* oben.

(c) E: Das Auto passiert beide Ampeln bei „grün“.

$\overline{E} = \{(g, r), (g, o), (r, g), (o, g), (o, o), (r, r), (o, r), (r, o)\}$

Aufgabe 2.3

Ein Spielwürfel zweimal nacheinander geworfen. Bestimme die Ereignisse E_1 und E_2 und ihre jeweilige Verknüpfung in aufzählender Form.

(a) E_1: Die Summe der Augenzahlen beträgt 8.
E_2: Beide Augenzahlen sind gerade.

E_1 und $E_2 = ?$

(b) E_1: Das Produkt der Augenzahlen ist 10.
E_2: Der Unterschied der beiden Augenzahlen ist 5.

E_1 oder $E_2 = ?$

(c) E_1: Die Summe der Augenzahlen beträgt mindestens 10.
E_2: Das Produkt der Augenzahlen beträgt 24

E_1 und $\overline{E}_2 = ?$

Aufgabe 2.3

(a) $E_1 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$E_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),\ldots,(6,6)\}$

$E_1 \cap E_2 = \{(2,6),(4,4),(6,2)\}$

Aufgabe 2.3

(a) $E_1 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$
$E_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),\ldots,(6,6)\}$
$E_1 \cap E_2 = \{(2,6),(4,4),(6,2)\}$

(b) $E_1 = \{(2,5),(5,2)\}$
$E_2 = \{(6,1),(1,6)\}$
$E_1 \cup E_2 = \{(1,6),(2,5),(5,2),(6,1)\}$

Aufgabe 2.3

(a) $E_1 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$E_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),\ldots,(6,6)\}$

$E_1 \cap E_2 = \{(2,6),(4,4),(6,2)\}$

(b) $E_1 = \{(2,5),(5,2)\}$

$E_2 = \{(6,1),(1,6)\}$

$E_1 \cup E_2 = \{(1,6),(2,5),(5,2),(6,1)\}$

(c) $E_1 = \{(4,6),(5,5),(6,4)\} \cup \{(5,6),(6,5)\} \cup \{(6,6)\}$

$E_2 = \{(4,6),(6,4)\}$

$E_1 \cap \overline{E_2} = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$

Aufgabe 2.4

Bei Würfeln mit einem Spielwürfel ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) sind folgende Ereignisse gegeben: $A = \{2, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$, $D = \{3, 4\}$ und $E = \{5\}$

(a) Bestimme das Gegenereignis von A?

(b) Welches ist das sichere Ereignis?

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

(d) Welche der gegebenen Ereignisse ziehen andere nach sich?

(e) Bestimme das Ereignis „C oder D tritt ein“.

(f) Bestimme das Ereignis „Ereignis C und D tritt ein“.

(g) Welche Ereignispaare sind unvereinbar?

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

$E = \{5\}$

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

$E = \{5\}$

(d) Welche Ereignisse ziehen andere nach sich?

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

$E = \{5\}$

(d) Welche Ereignisse ziehen andere nach sich?

$A \subset B$, $D \subset C$

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

$E = \{5\}$

(d) Welche Ereignisse ziehen andere nach sich?

$A \subset B,\ D \subset C$

(e) Bestimme das Ereignis „C oder D tritt ein“.

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

$E = \{5\}$

(d) Welche Ereignisse ziehen andere nach sich?

$A \subset B,\ D \subset C$

(e) Bestimme das Ereignis „C oder D tritt ein".

$C \cup D = \{1, 3, 4, 5\}$

(f) Bestimme das Ereignis „Ereignis C und D tritt ein“.

(f) Bestimme das Ereignis „Ereignis C und D tritt ein".

$C \cap D = \{3\}$

(f) Bestimme das Ereignis „Ereignis C und D tritt ein".

$C \cap D = \{3\}$

(g) Welche Ereignisse sind (paarweise) unvereinbar?

(f) Bestimme das Ereignis „Ereignis C und D tritt ein“.

$C \cap D = \{3\}$

(g) Welche Ereignisse sind (paarweise) unvereinbar?

- A und C
- A und D
- A und E
- B und C
- B und E
- D und E

Aufgabe 2.5

Drücke jedes der folgenden Ereignisse durch die Ereignisse A, B und C durch die Mengenoperationen *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Komplenent* aus. Zeichne jeweils das entsprechende Venn-Diagramm.

(a) Mindestens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.

(b) Höchstens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.

(c) Keines der Ereignisse A, B, C tritt ein.

(d) Alle drei Ereignisse A, B, C treten ein.

(e) Genau eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.

(f) Die Ereignisse A und B treten ein; jedoch nicht Ereignis C.

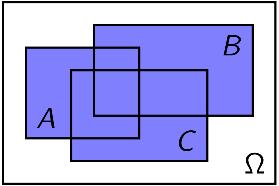
(g) A tritt ein oder B tritt nicht ein.

Aufgabe 2.5

(a) $A \cup B \cup C$

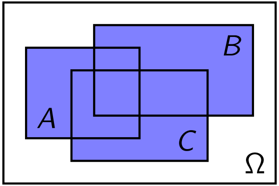
Aufgabe 2.5

(a) $A \cup B \cup C$



Aufgabe 2.5

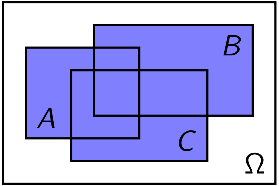
(a) $A \cup B \cup C$



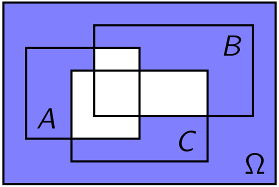
(b) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

Aufgabe 2.5

(a) $A \cup B \cup C$

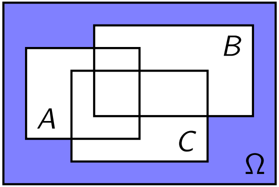


(b) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

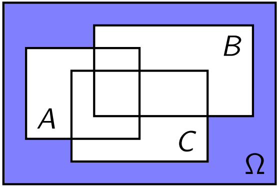


(c) $(A \cup B \cup C)^c$

(c) $(A \cup B \cup C)^c$

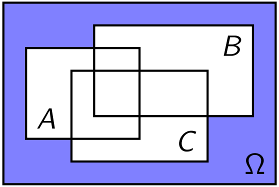


(c) $(A \cup B \cup C)^c$

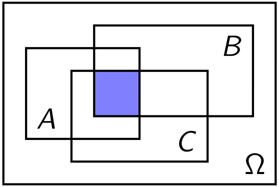


(d) $A \cap B \cap C$

(c) $(A \cup B \cup C)^c$

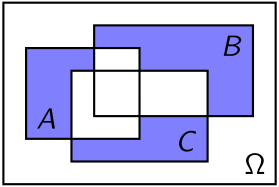


(d) $A \cap B \cap C$



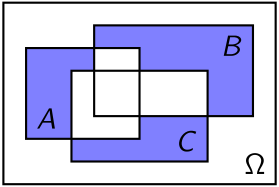
(e) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

(e) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

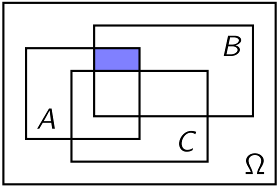


(f) $A \cup B \cap C^c$

(e) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

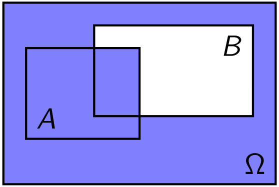


(f) $A \cup B \cap C^c$



(g) $A \cup B^c$

(g) $A \cup B^c$



Aufgabe 2.6

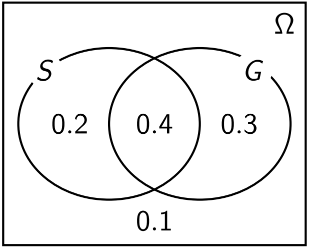
Im Kollegi arbeiten 60% der Schüler genau, 70% arbeiten schnell und 40% arbeiten schnell und genau. Nun wird ein Schüler zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet er

(a) schnell und genau?

(b) schnell und nicht genau?

(c) weder schnell noch genau?

Aufgabe 2.6



(a) $P(\text{schnell und genau}) = 0.4$

(b) $P(\text{schnell aber nicht genau}) = 0.3$

(c) $P(\text{weder schnell noch genau}) = 0.1$

Aufgabe 2.7

Ein fairer Spielwürfel wird einmal geworfen. Betrachte folgende Ereignisse

- A: Die Augenzahl ist gerade.
- B: Die Augenzahl ist prim.
- C: Die Augenzahl ist grösser als 2.

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

(a) $P(A)$

(b) $P(B)$

(c) $P(C)$

(d) $P(A \cap B)$

(e) $P(B \cup C)$

(f) $P(A \cap B \cap C)$

(g) $P(\overline{A} \cap B)$

(h) $P(A \cup B \cup \overline{C})$

Aufgabe 2.7

(a) $P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$

(b) $P(B) = P(\{2, 3, 5\}) = \frac{1}{2}$

(c) $P(C) = P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{2}{3}$

(d) $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$

(e) $P(B \cup C) = P(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{5}{6}$

(f) $P(A \cap B \cap C) = P(\{\,\}) = 0$

(g) $P(\overline{A} \cap B) = P(\{3, 5\}) = \frac{1}{3}$

(h) $P(A \cup B \cup \overline{C}) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$

Aufgabe 2.8

Gegeben: Stichprobenraum Ω und Ereignisse A, B in Ω

Beweise mit Hilfe der Axiome von Kolmogoroff folgende Aussagen:

(a) $P(A) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) = 0$

(c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A)$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega)$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$$\overset{\text{DG}}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}])$$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$\overset{\text{DG}}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$\overset{DG}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$\overset{\text{DG}}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

(d) Stelle $A \cup B$ als Vereinigung disjunkter Mengen dar:

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$\overset{\text{DG}}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

(d) Stelle $A \cup B$ als Vereinigung disjunkter Mengen dar:

$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$\overset{DG}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

(d) Stelle $A \cup B$ als Vereinigung disjunkter Mengen dar:

$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$

$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$$\overset{\text{DG}}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

(d) Stelle $A \cup B$ als Vereinigung disjunkter Mengen dar:

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$$

$$\overset{(c)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A)$$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$\overset{\text{DG}}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

(d) Stelle $A \cup B$ als Vereinigung disjunkter Mengen dar:

$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$

$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$

$\overset{(c)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Aufgabe 2.9

Eine faire Münze mit den zwei Seiten *Wappen* (W) und *Zahl* (Z) wird dreimal nacheinander geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

(a) dreimal *Wappen*

(b) die Folge *Wappen*, *Zahl*, *Wappen*

(c) alle Folgen mit zweimal *Wappen* und einmal *Zahl*

(d) alle Folgen mit mehr *Wappen* als *Zahl*

Aufgabe 2.9

(a) $P(\mathrm{WWW}) = \dfrac{1}{8}$

Aufgabe 2.9

(a) $P(\mathrm{WWW}) = \dfrac{1}{8}$

(b) $P(\mathrm{WZW}) = \dfrac{1}{8}$

Aufgabe 2.9

(a) $P(\text{WWW}) = \frac{1}{8}$

(b) $P(\text{WZW}) = \frac{1}{8}$

(c) $P(\text{WWZ}) + P(\text{WZW}) + P(\text{ZWW}) = \frac{3}{8}$

Aufgabe 2.9

(a) $P(\mathrm{WWW}) = \frac{1}{8}$

(b) $P(\mathrm{WZW}) = \frac{1}{8}$

(c) $P(\mathrm{WWZ}) + P(\mathrm{WZW}) + P(\mathrm{ZWW}) = \frac{3}{8}$

(d) $P(\mathrm{WWW}) + P(\mathrm{WWZ}) + P(\mathrm{WZW}) + P(\mathrm{ZWW}) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2.10

Ein fairer Spielwürfel wird zweimal geworfen. X steht für das Resultat des ersten und Y für das Resulat des zweiten Wurfs. Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E.

(a) $E = \{(x, y) \colon X = Y\}$
(b) $E = \{(x, y) \colon X + Y > 10\}$
(c) $E = \{(x, y) \colon Y \neq 4\}$
(d) $E = \{(x, y) \colon X - Y = 2\}$
(e) $E = \{(x, y) \colon |X - Y| = 3\}$
(f) $E = \{(x, y) \colon \max(X, Y) = 4\}$

Aufgabe 2.10

(a) $E = \{(x, y) \colon X = Y\} = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)$

Aufgabe 2.10

(a) $E = \{(x, y) \colon X = Y\} = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Aufgabe 2.10

(a) $E = \{(x, y) \colon X = Y\} = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $E = \{(x, y) \colon X + Y > 10\} = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

Aufgabe 2.10

(a) $E = \{(x, y) \colon X = Y\} = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $E = \{(x, y) \colon X + Y > 10\} = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

$$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Aufgabe 2.10

(a) $E = \{(x, y)\colon X = Y\} = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $E = \{(x, y)\colon X + Y > 10\} = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

$$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(c) $E = \{(x, y)\colon Y \neq 4\} = \Omega \setminus \{(1, 4), (2, 4), \ldots, (6, 4)\}$

Aufgabe 2.10

(a) $E = \{(x,y)\colon X = Y\} = \{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $E = \{(x,y)\colon X + Y > 10\} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$

$$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(c) $E = \{(x,y)\colon Y \neq 4\} = \Omega \setminus \{(1,4),(2,4),\ldots,(6,4)\}$

$$P(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(d) $E = \{(x,y)\colon X - Y = 2\} = \{(6,4),(5,3),(4,2),(3,1)\}$

Aufgabe 2.10

(a) $E = \{(x, y) \colon X = Y\} = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $E = \{(x, y) \colon X + Y > 10\} = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

$$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(c) $E = \{(x, y) \colon Y \neq 4\} = \Omega \setminus \{(1,4), (2,4), \dots, (6,4)\}$

$$P(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(d) $E = \{(x, y) \colon X - Y = 2\} = \{(6,4), (5,3), (4,2), (3,1)\}$

$$P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(e) $E = \{(x, y)\colon |X - Y| = 3\}$

$$= \{(6,3),(3,6),(5,2),(2,5),(4,1),(1,4)\}$$

(e) $$\begin{aligned} E &= \{(x,y) \colon |X - Y| = 3\} \\ &= \{(6,3),(3,6),(5,2),(2,5),(4,1),(1,4)\} \end{aligned}$$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(e) $$\begin{aligned} E &= \{(x,y)\colon |X-Y| = 3\} \\ &= \{(6,3),(3,6),(5,2),(2,5),(4,1),(1,4)\} \end{aligned}$$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(f) $$\begin{aligned} E &= \{(x,y)\colon \max(X,Y) = 4\} \\ &= \{(4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4)\} \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} E &= \{(x,y)\colon |X-Y|=3\} \\ &= \{(6,3),(3,6),(5,2),(2,5),(4,1),(1,4)\} \end{aligned}$$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(f) $$\begin{aligned} E &= \{(x,y)\colon \max(X,Y)=4\} \\ &= \{(4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4)\} \end{aligned}$$

$$P(E) = \frac{7}{36}$$

Aufgabe 2.11

Aus einer Schachtel mit 7 weissen, 5 blauen und mehreren roten Kugeln wird zufällig eine Kugel gezogen. Wie viele rote Kugeln befinden sich in der Schachtel, wenn die Wahrscheinlichkeit,

(a) dass die gezogene Kugel weiss ist, $\frac{1}{3}$ beträgt,

(b) dass die gezogene Kugel rot ist, $\frac{1}{4}$ beträgt,

(c) dass die gezogene Kugel blau ist, grösser als $\frac{3}{10}$ ist.

Aufgabe 2.11

$x =$ Anzahl rote Kugeln

(a)
$$
\begin{aligned}
P(w) &= \frac{1}{3} \\
\frac{7}{7+5+x} &= \frac{1}{3} \\
\frac{7}{12+x} &= \frac{7}{21} \\
x &= 9 \text{ rote Kugeln}
\end{aligned}
$$

(b)

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{1}{4} \\ \frac{x}{7+5+x} &= \frac{1}{4} \\ 4x &= 12 + x \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \text{ rote Kugeln} \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P(b) &> \frac{3}{10} \\
\frac{5}{7+5+x} &> \frac{3}{10} \\
50 &> 36 + 3x \\
x &\leq 4
\end{aligned}
$$

2, 3, oder 4 rote Kugeln

Aufgabe 2.12

Eine Urne enthält 900 Kugeln mit den Nummern

$$100, 101, 102, \ldots, 999.$$

Eine Kugel wird zufällig gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl darauf

(a) durch 10 teilbar ist,

(b) nicht durch 6 teilbar ist,

(c) durch 2 und durch 7 teilbar ist,

(d) durch 2 oder 7 aber nicht durch 2 und 7 teilbar ist.

Aufgabe 2.12

Die Aufgaben lassen sich mehr oder weniger „mechanisch“ lösen, wenn man zur Berechnung der Anzahl a, der durch d teilbaren Zahlen in der Menge

$$\{n_{\text{min}}, n_{\text{min}} + 1, n_{\text{min}} + 2, \ldots, n_{\text{max}} - 1, n_{\text{max}}\}$$

folgende Funktion verwendet:

$$a = \left\lfloor \frac{n_{\text{max}}}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_{\text{min}} - 1}{d} \right\rfloor$$

- Der Minuend zählt die Anzahl der der durch d teilbaren Zahlen in der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, n_{\text{max}}\}$
- Der Subtrahend zählt die Anzahl der der durch d teilbaren Zahlen in der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, n_{\text{min}} - 1\}$

(a) $a = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 99 - 9 = 90$

(a) $a = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 99 - 9 = 90$

$$P(E) = \frac{90}{900} = 0.1$$

(a) $a = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 99 - 9 = 90$

$$P(E) = \frac{90}{900} = 0.1$$

(b) $a = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor = 166 - 16 = 150$

(a) $a = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 99 - 9 = 90$

$$P(E) = \frac{90}{900} = 0.1$$

(b) $a = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor = 166 - 16 = 150$

$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{150}{900} = \frac{5}{6}$$

(a) $a = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 99 - 9 = 90$

$$P(E) = \frac{90}{900} = 0.1$$

(b) $a = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor = 166 - 16 = 150$

$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{150}{900} = \frac{5}{6}$$

(c) $a = \left\lfloor \frac{999}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{14} \right\rfloor = 71 - 7 = 64$

(a) $a = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 99 - 9 = 90$

$$P(E) = \frac{90}{900} = 0.1$$

(b) $a = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor = 166 - 16 = 150$

$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{150}{900} = \frac{5}{6}$$

(c) $a = \left\lfloor \frac{999}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{14} \right\rfloor = 71 - 7 = 64$

$$P(E) = \frac{64}{900} = \frac{16}{225}$$

(d) E_1: Zahl durch 2 teilbar: $a_1 = 450$

(d) E_1: Zahl durch 2 teilbar: $a_1 = 450$

E_2: Zahl durch 7 teilbar: $a_2 = 128$

(d) E_1: Zahl durch 2 teilbar: $a_1 = 450$

E_2: Zahl durch 7 teilbar: $a_2 = 128$

E_3: Zahl durch 14 teilbar: $a_3 = 64$

(d) E_1: Zahl durch 2 teilbar: $a_1 = 450$

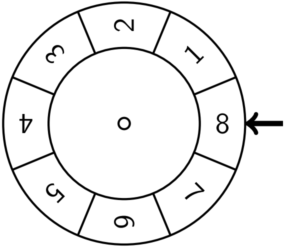
E_2: Zahl durch 7 teilbar: $a_2 = 128$

E_3: Zahl durch 14 teilbar: $a_3 = 64$

$$P(E) = \frac{450 + 128 - 2 \cdot 64}{900} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.13

Ein faires Glücksrad wird zweimal gedreht. Die erste Drehung erzeugt die Zehnerziffer Z, die zweite die Einerziffer E einer Zahl X.



Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(a) $A = \{x \colon X = 55\}$,

(b) $B = \{x \colon E + Z = 9\}$,

(c) $C = \{x \colon 50 \leq X \leq 70\}$.

Aufgabe 2.13

(a) $P(A) = P\big(\{55\}\big) = \dfrac{1}{64}$

Aufgabe 2.13

(a) $P(A) = P\big(\{55\}\big) = \dfrac{1}{64}$

(b) $P(B) = P\big(\{18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54\}\big) = \dfrac{8}{8^2} = \dfrac{1}{8}$

Aufgabe 2.13

(a) $P(A) = P\big(\{55\}\big) = \dfrac{1}{64}$

(b) $P(B) = P\big(\{18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54\}\big) = \dfrac{8}{8^2} = \dfrac{1}{8}$

(c) $P(C) = P\big(\{51, \dots, 58, 61, 62, \dots, 68\}\big) = \dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4}$

Aufgabe 2.14

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass im gleichen Jahr der 4.4., 6.6., 8.8., 10.10. und 12.12 auf den gleichen Wochentag fallen?

Aufgabe 2.14

4.4. bis 6.6: $30 + 31 + 2 = 63$ Tage

6.6. bis 8.8: $30 + 31 + 2 = 63$ Tage

8.8. bis 10.10: $31 + 30 + 2 = 63$ Tage

10.10. bis 12.10: $31 + 30 + 2 = 63$ Tage

Alle Differenzen sind durch 7 teilbar, also $p = 1$

Aufgabe 2.15

Bestimme den Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(4)$ für die Augenzahl 4 bei einem Spielwürfel, der wie folgt gezinkt wurde.

(a) Die Augenzahl 6 kommt im Mittel doppelt so häufig vor wie jede der anderen Augenzahlen.

(b) Die Wahrscheinlichkeiten sind proportional zur Augenzahl.

(c) Die Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen 1 bis 6 bilden eine aufsteigende arithmetische Folge mit $P(1) = \frac{1}{9}$.

Aufgabe 2.15

(a) $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p$; $P(6) = 2p$

Aufgabe 2.15

(a) $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p;\ P(6) = 2p$

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\ 5p + 2p &= 1 \\ 7p &= 1 \\ P(4) = p &= 1/7 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.15

(a) $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p;\ P(6) = 2p$

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\ 5p + 2p &= 1 \\ 7p &= 1 \\ P(4) = p &= 1/7 \end{aligned}$$

(b) $P(1) = k \cdot 1,\ P(2) = k \cdot 2,\ \ldots,\ P(6) = k \cdot 6$

Aufgabe 2.15

(a) $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p;\ P(6) = 2p$

$$
\begin{aligned}
P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\
5p + 2p &= 1 \\
7p &= 1 \\
P(4) = p &= 1/7
\end{aligned}
$$

(b) $P(1) = k \cdot 1,\ P(2) = k \cdot 2,\ \ldots,\ P(6) = k \cdot 6$

$$
\begin{aligned}
P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\
k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k &= 1 \\
21k &= 1 \\
k &= 1/21 \\
P(4) = 4k &= 4/21
\end{aligned}
$$

(c) $P(1) = \frac{1}{15}$, $P(2) = \frac{1}{15} + d$, ..., $P(6) = \frac{1}{15} + 5d$

(c) $P(1) = \frac{1}{15}$, $P(2) = \frac{1}{15} + d$, ..., $P(6) = \frac{1}{15} + 5d$

$$1 = P(1) + P(1) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$1 = \tfrac{1}{9} + \left(\tfrac{1}{9} + d\right) + \left(\tfrac{1}{9} + 2d\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{9} + 5d\right)$$

$$1 = \tfrac{6}{9} + 15d$$

$$\tfrac{1}{3} = 15d$$

$$d = \tfrac{1}{45}$$

$$P(4) = \tfrac{1}{9} + 3 \cdot \tfrac{1}{45} = \tfrac{8}{45}$$

Aufgabe 2.16

Ein Ball von 5 cm Durchmesser wird, ohne dass dabei gezielt wird, gegen ein Drahtgitter mit quadratischen Maschen von 8 cm Seitenlänge geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Ball, ohne einen Draht zu berühren, durch das Gitter hindurchfliegt? Die Dicke des Drahts kann dabei vernachlässigt werden.

Aufgabe 2.16

Inhalt der möglichen Landefläche für den Mittelpunkt des Ballquerschnitts:

$8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} = 64\,\text{cm}^2$

Inhalt der günstigen Landefläche für den Mittelpunkt des Ballquerschnitts:

$(8-5)\,\text{cm} \cdot (8-5)\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$

$$p = \frac{9}{64}$$

Aufgabe 2.17

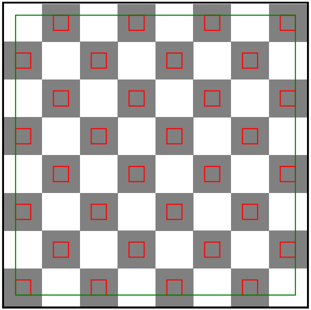
Man wirft ein Geldstück von 2 cm Durchmesser zufällig auf ein Schachbrett, dessen Felder eine Seitenlänge von 4 cm haben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ganz in einem schwarzen Feld liegt? (Dabei betrachten wir nur die Würfe, bei denen das Geldstück ganz innerhalb des Schachbrettes von 32 cm Seitenlänge liegt.)

Aufgabe 2.17

Das Geldstück wird mit seinen Mittelpunkt M identifizert.

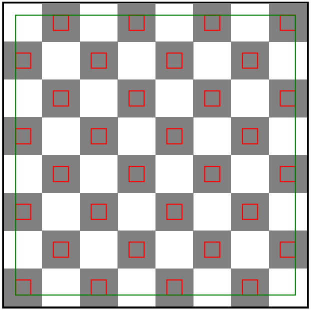
Aufgabe 2.17

Das Geldstück wird mit seinen Mittelpunkt M identifizert.



Aufgabe 2.17

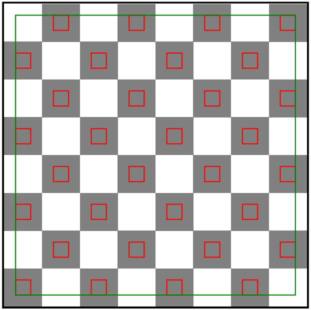
Das Geldstück wird mit seinen Mittelpunkt M identifizert.



Inhalt der günstigen Orte für M: $g = 32(4-2)(4-2) = 128\,\mathrm{cm}^2$

Aufgabe 2.17

Das Geldstück wird mit seinen Mittelpunkt M identifizert.

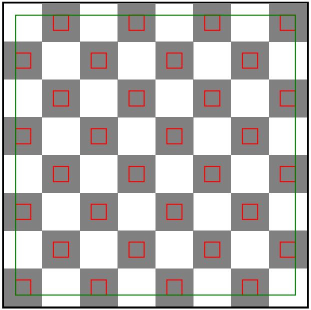


Inhalt der günstigen Orte für M: $g = 32(4-2)(4-2) = 128\,\text{cm}^2$

Inhalt der möglichen Orte für M: $m = (32-2)(32-2) = 900\,\text{cm}^2$

Aufgabe 2.17

Das Geldstück wird mit seinen Mittelpunkt M identifizert.



Inhalt der günstigen Orte für M: $g = 32(4-2)(4-2) = 128\,\text{cm}^2$

Inhalt der möglichen Orte für M: $m = (32-2)(32-2) = 900\,\text{cm}^2$

$$P(\text{Münze innerhalb Schwarz}) = \frac{g}{m} = 0.142$$

Aufgabe 2.18

Xenia und Yves wählen jeweils zufällig und unabhängig voneinander eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 2]$. Es wird eine uniforme (gleichförmige) Wahrscheinlichkeitsverteilung vorausgesetzt, bei der ein Ereignis proportional zur seinem Flächeninhalt in der grafischen Darstellung ist. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(a) Die von Xenia gewählte Zahl ist grösser als 1.5 und die von Yves ist kleiner als 0.8.

(b) Mindestes eine der gewählten Zahlen ist grösser als 1.

(c) Die beiden gewählten Zahlen sind gleich.

(d) Die von Xenia gewählte Zahl ist höchstens um 1 grösser als die Zahl, die Yves gewählt hat.

(d) Die von Xenia gewählte Zahl unterscheidet sich um mindestens 1 von der, die Yves gewählt hat.

Aufgabe 2.18

Da der Flächeninhalt $2 \cdot 2 = 4$ beträgt, muss jeder Inhalt mit dem Faktor $\frac{1}{4} = 0.25$ multipliziert werden.

(a) $P(X \geq 1.5, Y \leq 0.5)$

Aufgabe 2.18

Da der Flächeninhalt $2 \cdot 2 = 4$ beträgt, muss jeder Inhalt mit dem Faktor $\frac{1}{4} = 0.25$ multipliziert werden.

(a) $P(X \geq 1.5, Y \leq 0.5) = 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.25$

Aufgabe 2.18

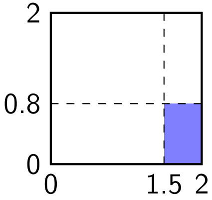
Da der Flächeninhalt $2 \cdot 2 = 4$ beträgt, muss jeder Inhalt mit dem Faktor $\frac{1}{4} = 0.25$ multipliziert werden.

(a) $P(X \geq 1.5, Y \leq 0.5) = 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 0.1$

Aufgabe 2.18

Da der Flächeninhalt $2 \cdot 2 = 4$ beträgt, muss jeder Inhalt mit dem Faktor $\frac{1}{4} = 0.25$ multipliziert werden.

(a) $P(X \geq 1.5, Y \leq 0.5) = 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 0.1$

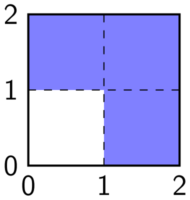


(b) $P(X > 1 \text{ oder } Y > 1)$

(b) $P(X > 1 \text{ oder } Y > 1) = 3 \cdot 0.25$

(b) $P(X > 1 \text{ oder } Y > 1) = 3 \cdot 0.25 = 0.75$

(b) $P(X > 1 \text{ oder } Y > 1) = 3 \cdot 0.25 = 0.75$

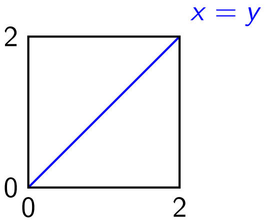


(c) $P(X = Y)$

(c) $P(X = Y) = 0 \cdot 0.25$

(c) $P(X = Y) = 0 \cdot 0.25 = 0$

(c) $P(X = Y) = 0 \cdot 0.25 = 0$

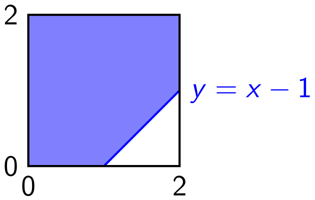


(d) $P(X < Y + 1)$

(d) $P(X < Y + 1) = \dfrac{4 - 0.5}{4}$

(d) $P(X < Y + 1) = \dfrac{4 - 0.5}{4} = 0.875$

(d) $P(X < Y + 1) = \dfrac{4 - 0.5}{4} = 0.875$

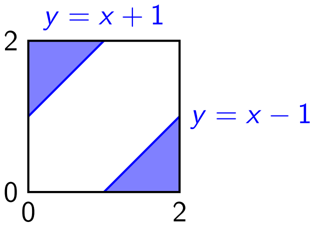


(e) $P(|X-Y|>1)$

(e) $P(|X - Y| > 1) = \dfrac{0.5 + 0.5}{4}$

(e) $P(|X-Y|>1)=\dfrac{0.5+0.5}{4}=0.25$

(e) $P(|X - Y| > 1) = \dfrac{0.5 + 0.5}{4} = 0.25$



Aufgabe 2.19

x und y seien zwei uniform (gleichförmig) verteilte und unabhängige Zufallszahlen im Intervall $I = [0, 1]$. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(a) $x = y$

(b) $y \leq x$

(c) $y < x$

(d) $y > x^2$

(e) $x + y \leq 1$

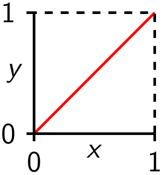
(f) $\frac{1}{2} \leq x \cdot y$

Aufgabe 2.19

(a) $P(x = y) = 0$

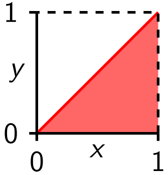
Aufgabe 2.19

(a) $P(x = y) = 0$



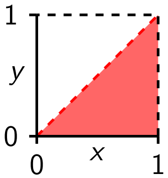
(b) $P(y \leq x) = \frac{1}{2}$

(b) $P(y \leq x) = \frac{1}{2}$



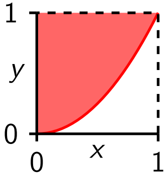
(c) $P(y < x) = \frac{1}{2}$

(c) $P(y < x) = \frac{1}{2}$



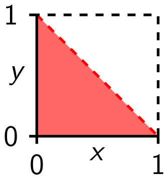
(d) $P(y > x^2) = 1 - \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = 1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(d) $P(y > x^2) = 1 - \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = 1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



(e) $P(x + y \leq 1) \Leftrightarrow P(y \leq 1 - x) = \dfrac{1}{2}$

(e) $P(x + y \leq 1) \Leftrightarrow P(y \leq 1 - x) = \frac{1}{2}$

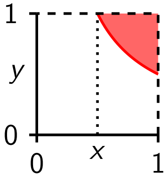


(f) $$P\left(\frac{1}{2} \le x \cdot y\right) = P\left(y \ge \frac{1}{2x}\right) = 0.5 - \int_{0.5}^{1} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$$
$$= 0.5 - \frac{1}{2}\big[\ln x\big]_{0.5}^{1}$$
$$= 0.5 - \frac{1}{2}(0 - \ln 0.5) = 0.153$$

(f) $$P\left(\frac{1}{2} \leq x \cdot y\right) = P\left(y \geq \frac{1}{2x}\right) = 0.5 - \int_{0.5}^{1} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 0.5 - \frac{1}{2}\left[\ln x\right]_{0.5}^{1}$$

$$= 0.5 - \frac{1}{2}(0 - \ln 0.5) = 0.153$$



Aufgabe 3.1

Wir werfen zwei faire Spielwürfel.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch (zwei gleiche Augenzahlen) zu werfen?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, wenn bekannt ist, dass die Summe der Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Würfel die Augenzahl 6 zeigt.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Würfel die Augenzahl 6 zeigt, wenn bekannt ist, dass die Augenzahlen verschieden sind.

Aufgabe 3.1

(a) A: zwei gleiche Augenzahlen

Aufgabe 3.1

(a) A: zwei gleiche Augenzahlen

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

Aufgabe 3.1

(a) A: zwei gleiche Augenzahlen

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$P(A)$

Aufgabe 3.1

(a) A: zwei gleiche Augenzahlen

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) A: zwei gleiche Augenzahlen
B: Die Summe der Augenzahlen ≤ 4

(b) A: zwei gleiche Augenzahlen
B: Die Summe der Augenzahlen ≤ 4

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

(b) A: zwei gleiche Augenzahlen
B: Die Summe der Augenzahlen ≤ 4

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(A|B)$$

(b) A: zwei gleiche Augenzahlen

B: Die Summe der Augenzahlen ≤ 4

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(b) A: zwei gleiche Augenzahlen
B: Die Summe der Augenzahlen ≤ 4

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{6/36} = 1/3$$

(c) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.

(c) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

(c) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

(d) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.
D: Die Augenzahlen sind verschieden.

(d) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.
D: Die Augenzahlen sind verschieden.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

(d) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.
D: Die Augenzahlen sind verschieden.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C|D)$$

(d) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.
D: Die Augenzahlen sind verschieden.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$$

(d) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.
D: Die Augenzahlen sind verschieden.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{10/36}{30/36}$$

(d) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.
D: Die Augenzahlen sind verschieden.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{10/36}{30/36} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3.2

Max hat für den kommenden Samstag folgenden Präferenzen:

- Wenn die Sonne scheint, wird er entweder das Freibad besuchen (60%) oder Beachvolleyball spielen.
- Wenn die Sonne nicht scheint, wird er entweder mit Freunden ins Kino gehen (80%) oder sich auf die Mathematik-Prüfung am nächsten Montag vorbereiten.

Am kommenden Samstag scheint die Sonne mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

(a) besucht Max das Freibad?

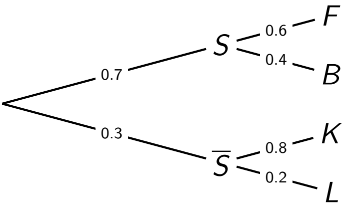
(b) spielt Max Beachvolleyball?

(c) geht Max ins Kino?

(d) lernt Max für die Prüfung?

Aufgabe 3.2

F:	Max besucht das Freibad	S:	Sonne scheint
B:	Max spielt Beachvolleyball	$\overline{B}$:	Sonne scheint nicht
K:	Max geht ins Kino		
L:	Max lernt für die Prüfung		



(a) $P(F) = P(S) \cdot P(F|S) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$

(b) $P(B) = P(S) \cdot P(B|S) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$

(c) $P(K) = P(\overline{S}) \cdot P(K|\overline{S}) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$

(d) $P(L) = P(\overline{S}) \cdot P(L|\overline{S}) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$

Aufgabe 3.3

Es seien Ω ein Stichprobenraum, Σ die Sigma-Algebra von Ω und P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche die Axiome von Kolmogoroff erfüllt. Ferner sei $C \in \Sigma$ mit $P(C) \neq 0$.

Zeige, dass für beliebige disjunkte Ereignisse $A, B \in \Sigma$ folgende Formel gilt:

$$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$$

Aufgabe 3.3

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \mid C) &\overset{(B)}{=} \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} \overset{(D)}{=} \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\
&\overset{(B)}{=} P(A|C) + P(B|C)
\end{aligned}
$$

(B) Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

(D) Distributivgesetz von $\cap$ über $\cup$

(3) 3. Axiom von Kolmogoroff (A und B sind disjunkt)

Aufgabe 3.4

Eine Lieferung von 100 Stück eines Artikels wird geprüft, indem zufällig 4 Artikel ausgewählt und untersucht werden. Wenn mindestens einer der Artikel defekt ist, wird die Lieferung zurückgewiesen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung zurückgewiesen wird, wenn sich darin insgesamt 5 defekte Artikel befinden.

Aufgabe 3.4

D: der Artikel ist defekt

Aufgabe 3.4

D: der Artikel ist defekt

$D\bar{D}\bar{D}\bar{D}$ $\quad$ $\bar{D}D\bar{D}\bar{D}$ $\quad$ $\bar{D}\bar{D}D\bar{D}$ $\quad$ $\bar{D}\bar{D}\bar{D}D$

$DD\bar{D}\bar{D}$ $\quad$ $D\bar{D}D\bar{D}$ $\quad$ $D\bar{D}\bar{D}D$ $\quad$ $\bar{D}DD\bar{D}$ $\quad$ $\bar{D}D\bar{D}D$ $\quad$ $\bar{D}\bar{D}DD$

$DDD\bar{D}$ $\quad$ $DD\bar{D}D$ $\quad$ $D\bar{D}DD$ $\quad$ $\bar{D}DDD$

$DDDD$

Aufgabe 3.4

D: der Artikel ist defekt

$D\bar{D}\bar{D}\bar{D}$ $\quad \bar{D}D\bar{D}\bar{D}$ $\quad \bar{D}\bar{D}D\bar{D}$ $\quad \bar{D}\bar{D}\bar{D}D$

$DD\bar{D}\bar{D}$ $\quad D\bar{D}D\bar{D}$ $\quad D\bar{D}\bar{D}D$ $\quad \bar{D}DD\bar{D}$ $\quad \bar{D}D\bar{D}D$ $\quad \bar{D}\bar{D}DD$

$DDD\bar{D}$ $\quad DD\bar{D}D$ $\quad D\bar{D}DD$ $\quad \bar{D}DDD$

$DDDD$

$$P(\text{genau } 1 \ D) = 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} \cdot \frac{93}{97} = \frac{16\,609\,800}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 2 \ D) = 6 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{94}{97} = \frac{1\,071\,600}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 3 \ D) = 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{95}{97} = \frac{22\,800}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 4 \ D) = 1 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{2}{97} = \frac{120}{94\,109\,400}$$

Aufgabe 3.4

D: der Artikel ist defekt

$D\bar{D}\bar{D}\bar{D}$ $\quad \bar{D}D\bar{D}\bar{D}$ $\quad \bar{D}\bar{D}D\bar{D}$ $\quad \bar{D}\bar{D}\bar{D}D$

$DD\bar{D}\bar{D}$ $\quad D\bar{D}D\bar{D}$ $\quad D\bar{D}\bar{D}D$ $\quad \bar{D}DD\bar{D}$ $\quad \bar{D}D\bar{D}D$ $\quad \bar{D}\bar{D}DD$

$DDD\bar{D}$ $\quad DD\bar{D}D$ $\quad D\bar{D}DD$ $\quad \bar{D}DDD$

$DDDD$

$$P(\text{genau } 1\ D) = 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} \cdot \frac{93}{97} = \frac{16\,609\,800}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 2\ D) = 6 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{94}{97} = \frac{1\,071\,600}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 3\ D) = 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{95}{97} = \frac{22\,800}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 4\ D) = 1 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{2}{97} = \frac{120}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{mind. ein Artikel ist defekt}) = \frac{17\,704\,320}{94\,109\,400} = \frac{147\,536}{784\,245} \approx 0.188$$

einfacher via Gegenereignis:

einfacher via Gegenereignis:

$$\begin{aligned} P(\text{mind. ein Artikel defekt}) &= 1 - P(\text{kein Artikel defekt}) \\ &= 1 - P(\bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) \end{aligned}$$

einfacher via Gegenereignis:

$$
\begin{aligned}
P(\text{mind. ein Artikel defekt}) &= 1 - P(\text{kein Artikel defekt}) \\
&= 1 - P(\bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) \\
&= 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \approx 0.188
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.5

Es seien Ω ein Stichprobenraum, Σ die Sigma-Algebra von Ω und P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche die Axiome von Kolmogoroff erfüllt. Ferner sei $B \in \Sigma$ mit $P(B) \neq 0$.

Zeige, dass für ein beliebiges Ereignis $A \in \Sigma$ die folgende Formel gilt:

$$P(A \cap B|B) = P(A|B)$$

Aufgabe 3.5

$$P(A \cap B|B) \overset{(B)}{=} \frac{P((A \cap B) \cap B)}{P(B)} \overset{(A)}{=} \frac{P(A \cap (B \cap B))}{P(B)}$$

$$\overset{(I)}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{(B)}{=} P(A|B)$$

(B) Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

(A) Assoziativgesetz für $\cap$

(I) Idempotenz der Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$

Aufgabe 3.6

Eine PAM-Klasse, die aus 4 Schülerinnen und 12 Schülern besteht, soll zufällig (z. B. durch das Los) in 4 gleich grosse Gruppen eingeteilt werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in jeder Gruppe genau ein Mädchen befindet?

Hinweis: Betrachte die folgenden Ereignisse

- $A_1 = \{\text{Schülerin 1 ist in irgend einer Gruppe}\}$
- $A_2 = \{\text{Schülerin 1 und 2 sind in verschiedenen Gruppen}\}$
- $A_3 = \{\text{Schülerin 1, 2 und 3 sind in verschiedenen Gruppen}\}$
- $A_4 = \{\text{Schülerin 1, 2, 3 und 4 sind in verschiedenen Gruppen}\}$

und fasse Ereignis A_4 als Resultat eines mehrstufigen Versuchs auf.

Aufgabe 3.6

♀ ♀ ♀ ♀ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂

□□□□ □□□□ □□□□ □□□□

$$\begin{aligned} P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

♀ ♀ ♀ ♀ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂

□□□□ □□□□ □□□□ □□□□

$$
\begin{aligned}
P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

$$P(A_1) = \frac{16}{16} \text{ (alle Möglichkeiten für Schülerin 1)}$$

Aufgabe 3.6

♀ ♀ ♀ ♀ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂

□□□□ □□□□ □□□□ □□□□

$$
\begin{aligned}
P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

$$P(A_1) = \frac{16}{16} \text{ (alle Möglichkeiten für Schülerin 1)}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{12}{15} \text{ (12 von 15 Plätzen für Schülerin 2)}$$

Aufgabe 3.6

♀ ♀ ♀ ♀ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂

$\square\square\square\square \quad \square\square\square\square \quad \square\square\square\square \quad \square\square\square\square$

$$\begin{aligned} P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

$P(A_1) = \dfrac{16}{16}$ (alle Möglichkeiten für Schülerin 1)

$P(A_2|A_1) = \dfrac{12}{15}$ (12 von 15 Plätzen für Schülerin 2)

$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \dfrac{8}{14}$ (8 von 14 Plätzen für Schülerin 3)

Aufgabe 3.6

♀ ♀ ♀ ♀ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂

□□□□ □□□□ □□□□ □□□□

$$
\begin{aligned}
P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

$P(A_1) = \dfrac{16}{16}$ (alle Möglichkeiten für Schülerin 1)

$P(A_2|A_1) = \dfrac{12}{15}$ (12 von 15 Plätzen für Schülerin 2)

$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \dfrac{8}{14}$ (8 von 14 Plätzen für Schülerin 3)

$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{4}{13}$ (4 von 13 Plätzen für Schülerin 4)

Aufgabe 3.6

$$\female\ \female\ \female\ \female\ \male\ \male\ \male\ \male\ \male\ \male\ \male\ \male\ \male\ \male\ \male\ \male$$

$$\square\square\square\square\quad\square\square\square\square\quad\square\square\square\square\quad\square\square\square\square$$

$$\begin{aligned} P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

$P(A_1) = \frac{16}{16}$ (alle Möglichkeiten für Schülerin 1)

$P(A_2|A_1) = \frac{12}{15}$ (12 von 15 Plätzen für Schülerin 2)

$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{14}$ (8 von 14 Plätzen für Schülerin 3)

$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{13}$ (4 von 13 Plätzen für Schülerin 4)

$$P(A_4) = \frac{16}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13}$$

Aufgabe 3.6

♀ ♀ ♀ ♀ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂

□□□□ □□□□ □□□□ □□□□

$$\begin{aligned} P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

$$P(A_1) = \frac{16}{16} \text{ (alle Möglichkeiten für Schülerin 1)}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{12}{15} \text{ (12 von 15 Plätzen für Schülerin 2)}$$

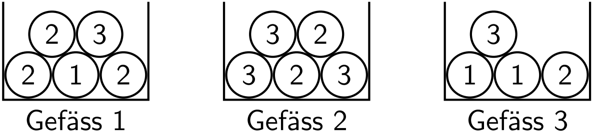
$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{14} \text{ (8 von 14 Plätzen für Schülerin 3)}$$

$$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{13} \text{ (4 von 13 Plätzen für Schülerin 4)}$$

$$P(A_4) = \frac{16}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{64}{455}$$

Aufgabe 3.7

In drei Gefässen befinden sich nummerierte Kugeln.



Die Kugeln in den Gefässen werden gut gemischt. Aus Gefäss 1 wird zufällig eine Kugel gezogen, deren Nummer n_1 notiert und wieder ins Gefäss 1 zurückgelegt. Anschliessend wird aus dem Gefäss mit der Nummer n_1 eine zweite Kugel gezogen, deren Nummer n_2 notiert und wieder in ihr Gefäss zurückgelgt. Dann wird aus dem Gefäss mit der Nummer n_2 eine dritte Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat

(a) die zweite gezogene Kugel die Nummer 3?

(b) die dritte gezogene Kugel die Nummer 1?

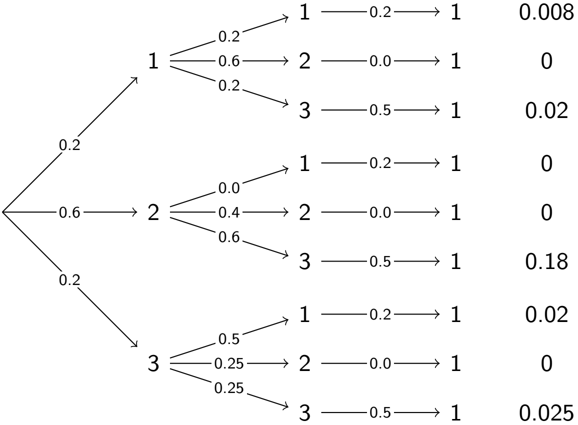
Aufgabe 3.7

(a) Baumdiagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, "0.2"] & 3 & 0.04 \\
 {} \arrow[ur, "0.2"] \arrow[r, "0.6"] \arrow[dr, "0.2"'] & 2 \arrow[r, "0.6"] & 3 & 0.36 \\
 & 3 \arrow[r, "0.25"] & 3 & 0.05
\end{tikzcd}$$

$$P(n_2 = 3) = 0.45$$

(b) Baumdiagramm:



$P(n_3 = 1) = 0.253$

Aufgabe 3.8

Eine Urne enthält 7 rote und 3 weisse Kugeln. Es weden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel bereits rot war.

(b) dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel weiss war.

Aufgabe 3.8

X_i ist die Farbe der Kugel in der i-ten Ziehung.

(a) $P(X_1 = r, X_2 = r) = P(X_1 = r) \cdot P(X_2 = r | X_1 = r)$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{10} \cdot P(X_2 = r | X_1 = r)$$

$$P(X_2 = r | X_1 = r) = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 3.8

X_i ist die Farbe der Kugel in der i-ten Ziehung.

(a) $P(X_1 = r, X_2 = r) = P(X_1 = r) \cdot P(X_2 = r | X_1 = r)$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{10} \cdot P(X_2 = r | X_1 = r)$$

$$P(X_2 = r | X_1 = r) = \frac{2}{3}$$

(b) $P(X_1 = w, X_2 = r) = P(X_1 = w) \cdot P(X_2 = r | X_1 = w)$

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{3}{10} \cdot P(X_2 = r | X_1 = w)$$

$$P(X_2 = r | X_1 = w) = \frac{7}{9}$$

Aufgabe 3.9

Eine Urne enthält 400 Kugeln. Einige davon sind rot, die übrigen sind weiss. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, das die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben haben, beträgt $\frac{1}{2}$.

Wie viele rote und weisse Kugeln befanden sich vor der Ziehung in der Urne?

Aufgabe 3.9

F_i: Farbe der Kugel in der i-ten Ziehung

r: Anzahl rote Kugeln vor der Ziehung

$w = 400 - r$: Anzahl weisse Kugeln vor der Ziehung

Aufgabe 3.9

F_i: Farbe der Kugel in der i-ten Ziehung

r: Anzahl rote Kugeln vor der Ziehung

$w = 400 - r$: Anzahl weisse Kugeln vor der Ziehung

$$\begin{aligned}
P(F_1 = \text{rot}, F_2 = \text{weiss}) + P(F_1 = \text{weiss}, F_2 = \text{rot}) &= \frac{1}{2} \\
\frac{400-r}{400} \cdot \frac{r}{399} + \frac{r}{400} \cdot \frac{400-r}{399} &= \frac{1}{2} \\
\frac{2(400-r)r}{400 \cdot 399} &= \frac{1}{2} \\
(400-r)r &= 39\,900 \\
-r^2 + 400r - 39\,900 &= 0 \\
r_1 &= 190 \\
r_2 &= 210
\end{aligned}$$

190 rote und 210 weisse Kugeln (oder umgekehrt)

Aufgabe 4.1

Eine Fabrik verwendet die Maschinen A, B und C, um einen bestimmten Artikel herzustellen.

- Maschine A stellt 50% der Artikel her, von denen 3% defekt sind.
- Maschine B stellt 30% der Artikel her, von denen 4% defekt sind.
- Maschine C stellt 20% der Artikel her, von denen 5% defekt sind.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Artikel defekt ist.

Aufgabe 4.1

$P(D)$

Aufgabe 4.1

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ &= 0.5 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.05 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\
&= 0.5 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.05 \\
&= 0.037
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.2

In einer Stadt betrachten sich 40% der Bewohner als Konservativ (K), 20% als Liberal (L), 30% als Fortschrittlich (F) und 10% als Unabhängig (U).

Üblicherweise gehen

- 50% der Konservativen
- 40% der Liberalen
- 60% der Fortschrittlichen
- 30% der Unabhängigen

zur Urne.

Wir wählen zufällig vor einem der Wahllokale eine Person aus, von der sich herausstellt, dass sie Wählerin ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit betrachtet sie sich als Unabhängig?

Aufgabe 4.2

Bayes:

$$P(U|W)$$

Aufgabe 4.2

Bayes:

$$P(U|W) = \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(K)P(W|K) + P(L)P(W|L) + P(F)P(W|F) + P(U)P(W|U)}$$

Aufgabe 4.2

Bayes:

$$P(U|W) = \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(K)P(W|K) + P(L)P(W|L) + P(F)P(W|F) + P(U)P(W|U)}$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.3}$$

Aufgabe 4.2

Bayes:

$$P(U|W) = \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(K)P(W|K) + P(L)P(W|L) + P(F)P(W|F) + P(U)P(W|U)}$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.3}$$

$$= 0.0612$$

Aufgabe 4.3

Von 1000 “idealen“ Münzen hat eine auf beiden Seiten „Wappen“, die übrigen sind „normal“.

Aus diesen Münzen wird zufällig und “blind“ eine ausgewählt und 10 Mal geworfen. Das Ergebnis ist 10 Mal Wappen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben wir eine der „normalen“ Münzen gezogen?

Aufgabe 4.3

WW: Münze mit Wappen–Wappen

WZ: Münze mit Wappen–Zahl

W^{10}: 10 Mal Wappen in Folge

Aufgabe 4.3

WW: Münze mit Wappen–Wappen

WZ: Münze mit Wappen–Zahl

W^{10}: 10 Mal Wappen in Folge

$$P(WZ|W^{10}) = \frac{P(WZ, W^{10})}{P(W^{10})}$$

$$= \frac{P(W^{10}) \cdot P(WZ|W^{10})}{P(WW) \cdot P(W^{10}|WW) + P(WZ) \cdot P(W^{10}|WZ)}$$

$$= \frac{(1-10^{-3}) \cdot 2^{-10}}{10^{-3} \cdot 1 + (1-10^{-3}) \cdot 2^{-10}}$$

$$\approx \frac{(1-2^{-10}) \cdot 2^{-10}}{2^{-10} + (1-2^{-10}) \cdot 2^{-10}} = \frac{1-2^{-10}}{1+1-2^{-10}} \approx \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.4

Es sind drei faire Münzen gegeben. Die erste hat „Wappen“ auf beiden Seiten, die zweite „Zahl“ auf beiden Seiten und die dritte sowohl „Wappen“ als auch „Zahl“.

Wir wählen eine der Münzen zufällig aus, werfen sie und erhalten „Wappen“. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Seite „Wappen“ zeigt.

Aufgabe 4.4

1. Stufe: Münze (WW, WZ, ZZ)

2. Stufe: Oberseite (W, Z)

$P(WW|W)$

Aufgabe 4.4

1. Stufe: Münze (WW, WZ, ZZ)

2. Stufe: Oberseite (W, Z)

$$P(WW|W) = \frac{P(WW, W)}{P(W)}$$

Aufgabe 4.4

1. Stufe: Münze (WW, WZ, ZZ)

2. Stufe: Oberseite (W, Z)

$$P(WW|W) = \frac{P(WW,W)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(WW)P(W|WW)}{P(WW)P(W|WW) + P(WZ)P(W|WZ) + P(ZZ)P(W|WZ)}$$

Aufgabe 4.4

1. Stufe: Münze (WW, WZ, ZZ)

2. Stufe: Oberseite (W, Z)

$$P(WW|W) = \frac{P(WW, W)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(WW)P(W|WW)}{P(WW)P(W|WW) + P(WZ)P(W|WZ) + P(ZZ)P(W|WZ)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{2}} = \frac{2}{2+1+0} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 4.5

In einem Fabrikationbetrieb weiss man auf Grund von Beobachtungen über einen längeren Zeitraum, dass 95% der hergestellten Apparate einwandfrei sind.

Jeder neue Apparat wird geprüft, bevor er die Fabrik verlässt. Das Prüfverfahren erklärt 97% der wirklich einwandfreien Apparate als „in Ordnung". Aber auch 2% der nicht einwandfreien Geräte werden als „in Ordnung" bezeichnet.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

(a) ein Apparat wirklich einwandfrei ist und auch als „in Ordnung" bezeichnet wird?

(b) dass ein zufällig aus der Produktion gegriffener Apparat als „in Ordnung" bezeichnet wird?

(c) dass ein Apparat, der die Kontrolle mit „in Ordnung" passiert, auch wirklich einwandfrei ist.

Aufgabe 4.5

E: Apparat ist einwandfrei

O: Apparat ist in Ordnung;

$P(E) = 0.95$

(a) $P(E \cap O) = 0.95 \cdot 0.75 = 0.7125$

(b) $$\begin{aligned} P(O) &= P(E)P(O|E) + P(\neg E)P(O|\neg E) \\ &= 0.95 \cdot 0.75 + 0.05 \cdot 0.02 = 0.7135 \end{aligned}$$

(c) $$P(E|O) = \frac{P(E)P(O|E)}{P(O)} = \frac{0.95 \cdot 0.75}{0.7135} = 0.9986$$

Aufgabe 4.6

Max möchte den kommenden Samstag mit seinen Kollegen verbringen.

Wenn es nicht regnet, werden sie mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit ein Stadt-Suchspiel („Foxtrail“) durchführen. Andernfalls gehen sie ins Kino.

Wenn es hingegen regnet, werden sie mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit ins Kino gehen. Sollten sie sich gegen das Kino entscheiden, würden sie trotz des schlechten Wetters das Stadt-Suchspiel durchführen.

Am kommenden Samstag soll es mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% regnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht Max mit seinen Kollegen ins Kino?

Aufgabe 4.6

$$P(K|R) = \frac{P(K,R)}{P(R)} = \frac{P(R) \cdot P(K|R)}{P(R) \cdot P(K|R) + P(\overline{R}) \cdot P(K|\overline{R})}$$

$$= \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2}$$

$$= \frac{9}{17} \approx 0.529$$

Aufgabe 4.7

Von 4 Karten ist eine auf beiden Seiten blau bemalt, zwei sind auf beiden Seiten rot bemalt und eine ist auf einer Seite rot und auf der anderen Seite blau bemalt.

Eine Karte wird zufällig gezogen und zufällig auf eine ihrere Seiten gelegt. Die sichtbare Seite ist rot. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die untere Seite blau ist?

Aufgabe 4.7

1. Stufe: Karte (BB, RR, RB)
2. Stufe: sichtbare Seite (b, r)

Aufgabe 4.7

1. Stufe: Karte (BB, RR, RB)
2. Stufe: sichtbare Seite (b, r)

$$P(RB|r) = \frac{P(RB, r)}{P(r)}$$

$$= \frac{P(RB)P(r|RB)}{P(BB)P(r|BB) + P(RR)P(r|RR) + P(RB)P(r|RB)}$$

$$= \frac{1/4 \cdot 1/2}{1/4 \cdot 1/2 + 2/4 \cdot 2/2 + 1/4 \cdot 0/2}$$

$$= \frac{1/8}{5/8} = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 4.8

Laut Polizeistatistik beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch in einem bestimmten Wohnquartier im Mittel 0.0001 pro Haus und Tag.

Findet ein Einbruch statt, löst eine Alarmanlage mit 99.9% den Alarm aus. Umgekehrt, ist die Alarmanlage so empfindlich eingestellt, dass sie ohne einen Einbruch mit der Wahrscheinlichkeit von 0.0005 aktiviert wird (z. B. durch Tiere oder schwache Erdbeben).

Nun wird ein Alarm ausgelöst. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet auch wirklich ein Einbruch statt?

Aufgabe 4.8

E: Einbruch findet statt

A: Alarm geht los

$$
\begin{aligned}
P(E|A) &= \frac{P(E \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(E) \cdot P(A|E)}{P(E) \cdot P(A|E) + P(\overline{E}) \cdot P(A|\overline{E})} \\
&= \frac{0.0001 \cdot 0.999}{0.0001 \cdot 0.999 + 0.9999 \cdot 0.0005} \approx 0.167
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.1

Ein fairer Spielwürfel wird zweimal geworfen. Sind die beiden Ereignisse unabhängig?

- A: Die Summe der Augenzahlen ist durch 2 teilbar
- B: Das Produkt der Augenzahlen ist nicht durch 2 teilbar

Aufgabe 5.1

- $P(A)$

Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\dots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B)$

Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),\ldots,(5,5)\}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),\ldots,(5,5)\}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$
- $P(A \cap B)$

Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),\ldots,(5,5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $P(A \cap B) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(5,5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),\ldots,(5,5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- $P(A \cap B) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(5,5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\dots,(6,4),(6,6)\}) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),\dots,(5,5)\}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$
- $P(A \cap B) = P(\{(1,1),(1,3),\dots,(5,5)\}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

A und B sind (stochastisch) abhängig.

Aufgabe 5.2

Ein fairer Spielwürfel wird zweimal geworfen. Sind die Ereignisse unabhängig?

- A: Die Summe der Augenzahlen ist durch 2 teilbar
- B: Produkt der Augenzahlen ist 12

Aufgabe 5.2

- $P(A)$

Aufgabe 5.2

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 5.2

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Aufgabe 5.2

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $P(A \cap B) = P(\{(2,6),(6,2)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Aufgabe 5.2

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\dots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $P(A \cap B) = P(\{(2,6),(6,2)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Aufgabe 5.2

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $P(A \cap B) = P(\{(2,6),(6,2)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A und B sind (stochastisch) unabhängig.

Aufgabe 5.3

Ein fairer Spielwürfel wird zweimal geworfen. Sind die Ereignisse unabhängig?

- A: Summe der Augenzahlen ist höchstens 7
- B: Produkt der Augenzahlen ist 12

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i)$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \le i \le 12)$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $P(A)$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36}$$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

- $P(B)$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) =$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \frac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

- $P(A \cap B) = P(\{(3,4),(4,3)\}) =$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

- $P(A \cap B) = P(\{(3,4),(4,3)\}) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

- $P(A \cap B) = P(\{(3,4),(4,3)\}) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \le i \le 12)$

  $$P(A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

- $P(A \cap B) = P(\{(3,4),(4,3)\}) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

A und B sind (stochastisch) abhängig.

Aufgabe 5.4

Eine faire Münze wird 12 Mal nacheinander geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dabei . . .

(a) niemals „Zahl“
(b) mindestens einmal “Zahl“
(c) zwölfmal „Zahl“
(d) zweimal „Zahl“
(e) elfmal „Zahl“
(f) mindestens elfmal „Zahl“
(g) höchstens sechsmal „Zahl“
(h) 4- bis 9-mal (inklusive) „Zahl“

erscheint.

Aufgabe 5.4

(a) $B(12, 0.5, 0) = \binom{12}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{12} = 2.44 \cdot 10^{-4}$

Aufgabe 5.4

(a) $B(12, 0.5, 0) = \binom{12}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{12} = 2.44 \cdot 10^{-4}$

(b) $\sum_{k=1}^{12} B(12, 0.5, k) = 1 - B(12, 0.5, 0) = 0.9998$

Aufgabe 5.4

(a) $B(12, 0.5, 0) = \binom{12}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{12} = 2.44 \cdot 10^{-4}$

(b) $\sum_{k=1}^{12} B(12, 0.5, k) = 1 - B(12, 0.5, 0) = 0.9998$

(c) $B(12, 0.5, 12) = \binom{12}{12} \cdot 0.5^{12} \cdot 0.5^0 = 2.44 \cdot 10^{-4}$

Aufgabe 5.4

(a) $B(12, 0.5, 0) = \binom{12}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{12} = 2.44 \cdot 10^{-4}$

(b) $\sum_{k=1}^{12} B(12, 0.5, k) = 1 - B(12, 0.5, 0) = 0.9998$

(c) $B(12, 0.5, 12) = \binom{12}{12} \cdot 0.5^{12} \cdot 0.5^0 = 2.44 \cdot 10^{-4}$

(d) $B(12, 0.5, 2) = \binom{12}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^{10} = 0.0161$

Aufgabe 5.4

(a) $B(12, 0.5, 0) = \binom{12}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{12} = 2.44 \cdot 10^{-4}$

(b) $\sum_{k=1}^{12} B(12, 0.5, k) = 1 - B(12, 0.5, 0) = 0.9998$

(c) $B(12, 0.5, 12) = \binom{12}{12} \cdot 0.5^{12} \cdot 0.5^0 = 2.44 \cdot 10^{-4}$

(d) $B(12, 0.5, 2) = \binom{12}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^{10} = 0.0161$

(e) $B(12, 0.5, 11) = \binom{12}{11} \cdot 0.5^{11} \cdot 0.5^1 = 0.00293$

(f) $$\sum_{k=11}^{12} B(12, 0.5, k) = \sum_{k=11}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.00317$$

(f) $$\sum_{k=11}^{12} B(12, 0.5, k) = \sum_{k=11}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.00317$$

(g) $$\sum_{k=0}^{6} B(12, 0.5, k) = \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.613$$

(f) $$\sum_{k=11}^{12} B(12, 0.5, k) = \sum_{k=11}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.00317$$

(g) $$\sum_{k=0}^{6} B(12, 0.5, k) = \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.613$$

(h) $$\sum_{k=4}^{9} B(12, 0.5, k)$$

$$= \sum_{k=0}^{9} B(12, 0.5, k) - \sum_{k=0}^{3} B(12, 0.5, k)$$

$$= \sum_{k=0}^{9} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} - \sum_{k=0}^{3} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$$

(f) $$\sum_{k=11}^{12} B(12, 0.5, k) = \sum_{k=11}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.00317$$

(g) $$\sum_{k=0}^{6} B(12, 0.5, k) = \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.613$$

(h) $$\sum_{k=4}^{9} B(12, 0.5, k)$$

$$= \sum_{k=0}^{9} B(12, 0.5, k) - \sum_{k=0}^{3} B(12, 0.5, k)$$

$$= \sum_{k=0}^{9} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} - \sum_{k=0}^{3} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$$

$$= 0.908$$

Aufgabe 5.5

Aus einer Urne mit zehn roten und fünf weissen Kugeln werden acht Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man vier bis sechs rote Kugeln?

Aufgabe 5.5

X: Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$P_8(4 \le X \le 6) = \sum_{k=4}^{6} \binom{8}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} = 0.7170$$

TI-84+: sum(binompdf(8,2/3,{4,5,6}))

oder binomcdf(8,2/3,6)−binomcdf(8,2/3,3)

Aufgabe 5.6

In einer Prüfung sind fünf Fragen zu beantworten. Für jede Frage stehen jeweils drei Antworten zu Auswahl, von denen genau eine richtig ist.

Ein Kandidat geht gänzlich unvorbereitet an diese Prüfung und wählt die Antworten rein zufällig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit löst der Kandidat ...

(a) keine Frage richtig
(b) mindestens eine Frage richtig
(c) alle Fragen richtig
(d) mindestens vier Fragen richtig

Aufgabe 5.6

X: Anzahl richtiger Antworten bei $n = 5$ Prüfungsfragen

$p = P(\textit{eine} \text{ Frage richtig zu beantworten}) = 1/3$

(a) $P(X = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.132$

Aufgabe 5.6

X: Anzahl richtiger Antworten bei $n = 5$ Prüfungsfragen

$p = P(\textit{eine}\text{ Frage richtig zu beantworten}) = 1/3$

(a) $P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.132$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{211}{243} = 0.868$

Aufgabe 5.6

X: Anzahl richtiger Antworten bei $n = 5$ Prüfungsfragen

$p = P(\textit{eine}$ Frage richtig zu beantworten$) = 1/3$

(a) $P(X = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.132$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{211}{243} = 0.868$

(c) $P(X = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243} = 0.00412$

Aufgabe 5.6

X: Anzahl richtiger Antworten bei $n = 5$ Prüfungsfragen

$p = P(\textit{eine}\text{ Frage richtig zu beantworten}) = 1/3$

(a) $P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.132$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{211}{243} = 0.868$

(c) $P(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243} = 0.00412$

(d) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$

$$= \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{11}{243} = 0.0453$$

Aufgabe 5.7

Wirft man einen Reissnagel, so kommt er in 60% der Fälle in Kopflage und in 40% der Fälle in Seitenlage zur Ruhe. Jemand wirft zehn dieser Reissnägel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er mehr als dreimal die Seitenlage?

Aufgabe 5.7

X: Anzahl Reissnägel in Seitenlage

$$P_{10}(X > 3) = 1 - P_{10}(X \leq 3)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{10-k} = 0.6177$$

TI-83+/TI-84+: 1−binomcdf(10,0.4,3)

Aufgabe 5.8

Nach Angaben der Post erreichen 90% aller Inlandbriefe den Empfänger am nächsten Tag. Johanna verschickt acht Einladungen zu ihrem Geburtstag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind ...

(a) alle Einladungen am nächsten Tag zugestellt?

(b) mindestens sechs Einladungen am nächsten Tag zugestellt?

Aufgabe 5.8

X: Anzahl Einladungen die am nächsten Tag zugestellt werden

X ist binomialverteilt mit $p = 0.9$

(a) $P(X = 8) = \binom{8}{8} 0.9^8 \cdot 0.1^0 = 0.4305$

(b) $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=1}^{5} P(X = x) = 0.9619$

Aufgabe 5.9

Eine gewisse Eigenschaft sei in einer Bevölkerung mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% anzutreffen. Wie viele Personen sind mindestens zufällig auszuwählen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine Person mit der Eigenschaft zu finden?

Aufgabe 5.9

X: Anzahl Personen mit der bestimmten Eigenschaft

$$\begin{aligned} P_n(X \geq 1) &\geq 0.9 \\ 1 - P_n(X = 0) &\geq 0.9 \\ 1 - 0.95^n &\geq 0.9 \\ 0.1 &\geq 0.95^n \\ \ln 0.1 &\geq n \cdot \ln 0.95 \\ \ln 0.1 / \ln 0.95 &\leq n \\ 44.89 &\leq n \end{aligned}$$

Aufgabe 5.10

Wie viele Komponenten mit einer Zuverlässigkeit von je 35% müssen mindestens parallel geschaltet werden, damit die Zuverlässigkeit des Parallelsystems mindestens 99% beträgt?

Aufgabe 5.10

$$
\begin{aligned}
P(\text{Mindestens eine von } n \text{ Komponenten funktioniert}) &\geq 0.99 \\
1 - P(\text{Alle } n \text{ Komponenten versagen}) &\geq 0.99 \\
1 - 0.65n &\geq 0.99 \\
0.01 &\geq 0.65n \\
\ln 0.01 &\geq n \cdot \ln 0.65 \\
\ln 0.01 / \ln 0.65 &\leq n \\
10.69 &\leq n
\end{aligned}
$$

Mindestens 11 Komponenten müssen parallel geschaltet werden.

Aufgabe 5.11

Anna und Bea wollen mit einem Münzwurf entscheiden, ob sie ins Kino oder ins Theater gehen sollen. Unglücklicherweise steht ihnen nur eine gezinkte Münze (mit unbekannter Wahrscheinlichkeit) zur Verfügung.

Wie können sie diese Münze einsetzen, um mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Entscheidung fürs Theater oder fürs Kino herbeizuführen und ohne die Münze vorher zu „testen“?

Aufgabe 5.11

Die Münze wird zweimal nacheinander geworfen und die Entscheidung gemäss folgendem Aktionsplan gefällt:

1. Wurf	2. Wurf	Aktion

Aufgabe 5.11

Die Münze wird zweimal nacheinander geworfen und die Entscheidung gemäss folgendem Aktionsplan gefällt:

1. Wurf	2. Wurf	Aktion
Wappen	Zahl	wähle Kino und beende den Versuch

Aufgabe 5.11

Die Münze wird zweimal nacheinander geworfen und die Entscheidung gemäss folgendem Aktionsplan gefällt:

1. Wurf	2. Wurf	Aktion
Wappen	Zahl	wähle Kino und beende den Versuch
Zahl	Wappen	wähle Theater und beende den Versuch

Aufgabe 5.11

Die Münze wird zweimal nacheinander geworfen und die Entscheidung gemäss folgendem Aktionsplan gefällt:

1. Wurf	2. Wurf	Aktion
Wappen	Zahl	wähle Kino und beende den Versuch
Zahl	Wappen	wähle Theater und beende den Versuch
Zahl	Zahl	wiederhole den Versuch

Aufgabe 5.11

Die Münze wird zweimal nacheinander geworfen und die Entscheidung gemäss folgendem Aktionsplan gefällt:

1. Wurf	2. Wurf	Aktion
Wappen	Zahl	wähle Kino und beende den Versuch
Zahl	Wappen	wähle Theater und beende den Versuch
Zahl	Zahl	wiederhole den Versuch
Wappen	Wappen	wiederhole den Versuch

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) =$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} =$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) =$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} =$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

$P(\text{Kino})$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

$$P(\text{Kino}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Kino}|A_k)P(A_k)$$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

$$P(\text{Kino}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Kino}|A_k)P(A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot P(A_k)$$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

$$P(\text{Kino}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Kino}|A_k)P(A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot P(A_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k)$$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

$$P(\text{Kino}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Kino}|A_k)P(A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot P(A_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k) = \frac{1}{2}$$

Beweis:

A_k: Ereignis, dass im k-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

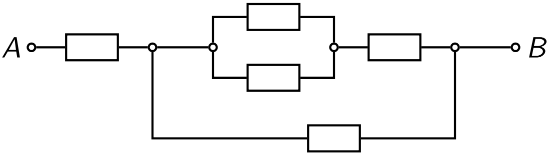
$$P(\text{Kino}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Kino}|A_k)P(A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot P(A_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k) = \frac{1}{2}$$

da $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_k) = 1$, wenn $P(\text{Wappen}) > 0$ und $P(\text{Zahl}) > 0$.

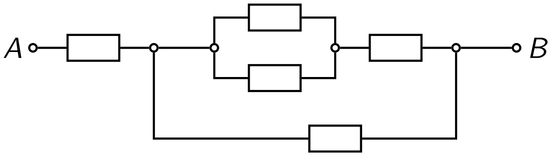
Aufgabe 5.12

Das unten abgebildete System besteht aus Komponenten, die sich alle unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p im funktionierenden Zustand befinden.



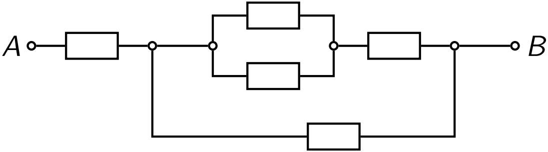
Das Gesamtsystem ist funktionierend, wenn es einen funktionierenden Weg vom Anfangspunkt A zum Endpunkt B gibt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geschieht dies? Vereinfache den Term so weit wie möglich.

Aufgabe 5.12



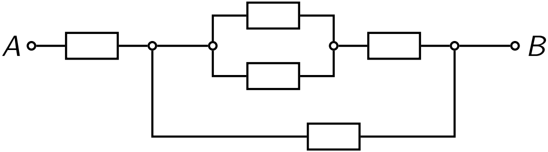
- innere Parallelschaltung:
  $p_1 = 1 - (1-p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$

Aufgabe 5.12



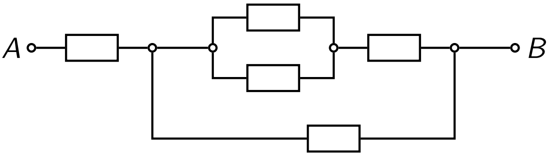
- innere Parallelschaltung:
  $p_1 = 1 - (1-p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$
- innere Serieschaltung:
  $p_2 = p_1 \cdot p = 2p^2 - p^3$

Aufgabe 5.12



- innere Parallelschaltung:
  $p_1 = 1 - (1-p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$
- innere Serieschaltung:
  $p_2 = p_1 \cdot p = 2p^2 - p^3$
- äussere Parallelschaltung:
  $$\begin{aligned} p_3 &= 1 - (1-p_2)(1-p) = 1 - (1 - p - p_2 + pp_2) \\ &= p + p_2 - pp_2 = p + 2p^2 - p^3 - (2p^3 - p^4) \\ &= p + 2p^2 - 3p^3 + p^4 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.12



- innere Parallelschaltung:
  $p_1 = 1 - (1-p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$
- innere Serieschaltung:
  $p_2 = p_1 \cdot p = 2p^2 - p^3$
- äussere Parallelschaltung:
  $$\begin{aligned} p_3 &= 1 - (1-p_2)(1-p) = 1 - (1 - p - p_2 + pp_2) \\ &= p + p_2 - pp_2 = p + 2p^2 - p^3 - (2p^3 - p^4) \\ &= p + 2p^2 - 3p^3 + p^4 \end{aligned}$$
- äussere Serieschaltung (Gesamtsystem):
  $p_4 = p \cdot p3 = p(p + 2p^2 - 3p^3 + p^4) = p^2 + 2p^3 - 3p^4 + p^5$

Aufgabe 5.13

Bei einer Nachrichtenübertragung werden zwei Zeichen 0 und 1 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 99% richtig übertragen. Eine Sequenz besteht aus 8 Zeichen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(a) Die Sequenz wird fehlerfrei übertragen.

(b) Nur die ersten sechs Zeichen werden fehlerfrei übertragen.

(c) Fünf Zeichen werden fehlerfrei übertragen.

(d) Mindestens 7 Zeichen werden fehlerfrei übertragen.

Nun werden 24 aufeinanderfolgende Sequenzen (aus je 8 Zeichen) übertragen.

(e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 20 Sequenzen richtig übertragen?

Aufgabe 5.13

(a) $P(A) = 0.99^8 = 0.923$

Aufgabe 5.13

(a) $P(A) = 0.99^8 = 0.923$

(b) $P(B) = 0.99^6 \cdot 0.01^2 = 9.41 \cdot 10^{-5}$

Aufgabe 5.13

(a) $P(A) = 0.99^8 = 0.923$

(b) $P(B) = 0.99^6 \cdot 0.01^2 = 9.41 \cdot 10^{-5}$

(c) $P(C) = \binom{8}{5} \cdot 0.99^5 \cdot 0.01^3 = 5.33 \cdot 10^{-5}$

Aufgabe 5.13

(a) $P(A) = 0.99^8 = 0.923$

(b) $P(B) = 0.99^6 \cdot 0.01^2 = 9.41 \cdot 10^{-5}$

(c) $P(C) = \binom{8}{5} \cdot 0.99^5 \cdot 0.01^3 = 5.33 \cdot 10^{-5}$

(d) $P(D) = \sum_{k=7}^{8} = \binom{8}{k} \cdot 0.99^k \cdot 0.01^{8-k} = 0.997$

Aufgabe 5.13

(a) $P(A) = 0.99^8 = 0.923$

(b) $P(B) = 0.99^6 \cdot 0.01^2 = 9.41 \cdot 10^{-5}$

(c) $P(C) = \binom{8}{5} \cdot 0.99^5 \cdot 0.01^3 = 5.33 \cdot 10^{-5}$

(d) $P(D) = \sum_{k=7}^{8} = \binom{8}{k} \cdot 0.99^k \cdot 0.01^{8-k} = 0.997$

(e) $P(\text{Sequenz wird richtig übertragen}) = 0.99^8 = 0.923$
X: Anzahl richtig übertragener Sequenzen

$$P_{24}(X \geq 20) = \sum_{k=20}^{24} = \binom{24}{k} \cdot 0.923^k \cdot 0.077^{24-k} = 0.966$$

Aufgabe 6.1

Die Ziffern einer Zahl sollen durch Werfen eines Spielwürfels bestimmt werden. Wie viele fünfstellige Zahlen sind denkbar?

Aufgabe 6.1

$6^5 = 7776$

Aufgabe 6.2

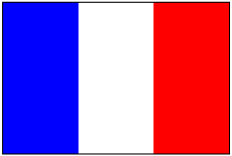
Aus 5 Australiern, 12 Belgierinnen und 6 Chinesen sollen 2 Personen verschiedener Nationalität ausgewählt werden. Auf wie viele Arten geht das?

Aufgabe 6.2

je einen Australier und eine Beligierin:	60 Möglichkeiten
je eine Belgierin und einen Chinesen:	72 Möglichkeiten
je einen Chinesen und einen Australier:	30 Möglichkeiten
Insgesamt (Summenregel)	162 Möglichkeiten

Aufgabe 6.3

Die untenstehende Flagge diene als Modell: Wie viele Nationalflaggen von diesem Muster kann man mit 6 Farben entwerfen, wenn zwei nebeneinanderliegende Streifen nicht die gleiche Farbe haben sollen?



Aufgabe 6.3

Wir verteilen die Farben von links nach rechts:

- Links: eine von 6 Farben

Aufgabe 6.3

Wir verteilen die Farben von links nach rechts:

- Links: eine von 6 Farben
- Mitte: eine von 5 Farben, denn zwei nebeneinander liegende Streifen dürfen nicht dieselbe Farbe haben.

Aufgabe 6.3

Wir verteilen die Farben von links nach rechts:

- Links: eine von 6 Farben
- Mitte: eine von 5 Farben, denn zwei nebeneinander liegende Streifen dürfen nicht dieselbe Farbe haben.
- Rechts: eine von 5 Farben, denn die Farbe vom mittleren Feld darf nicht wieder verwendet werden; hingegen ist die Farbe vom Feld links wieder erlaubt.

Aufgabe 6.3

Wir verteilen die Farben von links nach rechts:

- Links: eine von 6 Farben
- Mitte: eine von 5 Farben, denn zwei nebeneinander liegende Streifen dürfen nicht dieselbe Farbe haben.
- Rechts: eine von 5 Farben, denn die Farbe vom mittleren Feld darf nicht wieder verwendet werden; hingegen ist die Farbe vom Feld links wieder erlaubt.

Produktregel: $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ Möglichkeiten.

Aufgabe 6.4

Zwölf Spieler bestreiten ein Schachturnier. Die erste Runde besteht aus 6 Partien, die gleichzeitig gespielt werden. Wie viele verschiedene Paarungen sind für die erste Runde möglich?

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

...

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

...

Einer der übrigen 4 Spieler spielt gegen einen von 3 Gegnern.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

...

Einer der übrigen 4 Spieler spielt gegen einen von 3 Gegnern.

$\Rightarrow$ 3 Möglichkeiten für die fünfte Paarung.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

$\ldots$

Einer der übrigen 4 Spieler spielt gegen einen von 3 Gegnern.

$\Rightarrow$ 3 Möglichkeiten für die fünfte Paarung.

Es bleiben noch zwei Spieler und somit eine Paarung übrig.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

...

Einer der übrigen 4 Spieler spielt gegen einen von 3 Gegnern.

$\Rightarrow$ 3 Möglichkeiten für die fünfte Paarung.

Es bleiben noch zwei Spieler und somit eine Paarung übrig.

Produktregel: $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10\,395$ Paarungen

Aufgabe 6.5

Vereinfache und berechne:

(a) $\dfrac{10!}{7!}$

(b) $\dfrac{4 \cdot 5!}{5 \cdot 4!}$

(c) $\dfrac{12!}{(6!)^2}$

(d) $2^{6!} : 2^{713}$

Aufgabe 6.5

(a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

(b) 4

(c) $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)/6! = 924$

(d) $2^7 = 128$

Aufgabe 6.6

Die sieben Frauen und Herren Bundesräte sollen sich für eine Gruppenaufnahme in einer Reihe aufstellen. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

Aufgabe 6.6

$7! = 5040$

Aufgabe 6.7

Fünf Kriminalromane, drei Kochbücher und sieben Bildbände sollen auf einem Regal nebeneinander gestellt werden.

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

(b) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher der gleichen Art nebeneinander stehen sollen?

Aufgabe 6.7

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

Aufgabe 6.7

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

$(5+3+7)!$

Aufgabe 6.7

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

$(5 + 3 + 7)! = 15!$

Aufgabe 6.7

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

$(5+3+7)! = 15! = 1.308 \cdot 10^{13}$

(b) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher der gleichen Art nebeneinander stehen sollen?

Aufgabe 6.7

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

$(5 + 3 + 7)! = 15! = 1.308 \cdot 10^{13}$

(b) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher der gleichen Art nebeneinander stehen sollen?

$5! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 3!$

Aufgabe 6.7

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

$(5+3+7)! = 15! = 1.308 \cdot 10^{13}$

(b) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher der gleichen Art nebeneinander stehen sollen?

$5! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 3! = 21\,772\,800$

Aufgabe 6.8

Eine walisische Ortschaft hat den Namen *CWMFFRWD*. Wie viele verschiedene „Wörter“ lassen sich aus den Buchstaben dieses Ortsnamens bilden?

Aufgabe 6.8

$8!/(2! \cdot 2!) = 10\,080$

Aufgabe 6.9

Fünf Damen und fünf Herren kommen an ein Drehkreuz. Sie passieren das Drehkreuz nacheinander.

(a) Auf wie viele Arten können sie das Drehkreuz passieren?

(b) Wie viele Arten verbleiben, wenn die Damen den Vortritt haben?

(c) Es handle sich um 5 Paare, die das Drehkreuz hintereinander passieren. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

Aufgabe 6.9

(a) $10! = 3\,628\,800$

Aufgabe 6.9

(a) $10! = 3\,628\,800$

(b) $5! \cdot 5! = 14\,400$

Aufgabe 6.9

(a) $10! = 3\,628\,800$

(b) $5! \cdot 5! = 14\,400$

Aufgabe 6.9

(a) $10! = 3\,628\,800$

(b) $5! \cdot 5! = 14\,400$

(c) Für die 5 Paare als Ganzes gibt es 5! Möglichkeiten, das Drehkreuz zu passieren.

Aufgabe 6.9

(a) $10! = 3\,628\,800$

(b) $5! \cdot 5! = 14\,400$

(c) Für die 5 Paare als Ganzes gibt es 5! Möglichkeiten, das Drehkreuz zu passieren.

Bei jedem Paar gibt es, unabhängig von jedem anderen Paar $2! = 2$ Reihenfolgen (Frau oder Mann zuerst).

Aufgabe 6.9

(a) $10! = 3\,628\,800$

(b) $5! \cdot 5! = 14\,400$

(c) Für die 5 Paare als Ganzes gibt es 5! Möglichkeiten, das Drehkreuz zu passieren.

Bei jedem Paar gibt es, unabhängig von jedem anderen Paar $2! = 2$ Reihenfolgen (Frau oder Mann zuerst).

Produkteregel: $5! \cdot (2!)^5 = 3\,840$ Möglichkeiten

Aufgabe 6.10

Ein Signal kann durch sieben Flaggen, die untereinander hängen, gegeben werden. Man hat vier gleiche rote, zwei gleiche blaue und eine gelbe Fahne zur Verfügung. Wie viele verschiedene Signale kann man damit geben?

Aufgabe 6.10

$7!/(4! \cdot 2!) = 105$

Aufgabe 6.11

Der PIN-Code einer EC-Karte besteht aus einer Ziffernfolge von 6 Ziffern

(a) Wie viele verschiedene PIN-Codes sind möglich?

(b) Wenn man pro Code-Eingabe 5 Sekunden benötigt, wie viele Tage bräuchte man höchstens, um einen PIN-Code „zu erraten“?

Aufgabe 6.11

(a) 10^6 Möglichkeiten

Aufgabe 6.11

(a) 10^6 Möglichkeiten

(b) $10^6 \cdot 5 : 60 : 60 : 24$

Aufgabe 6.11

(a) 10^6 Möglichkeiten

(b) $10^6 \cdot 5 : 60 : 60 : 24 \approx 58$ Tage

Aufgabe 6.12

Auf wie viele Arten kann Franz acht voneinander unterscheidbare Murmeln in seinen beiden Hosentaschen unterbringen?

Aufgabe 6.12

Für die 1. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

Für die 2. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

...

Für die 8. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

Produktregel: $2^8 = 256$ Möglichkeiten

alternative Lösung als Auswahlproblem:

alternative Lösung als Auswahlproblem:

Aus den 8 Kugeln werden die Murmeln ausgewählt, die in die, sagen wir, linke Tasche kommen. Die Murmeln der rechten Tasche sind dadurch eindeutig bestimmt.

alternative Lösung als Auswahlproblem:

Aus den 8 Kugeln werden die Murmeln ausgewählt, die in die, sagen wir, linke Tasche kommen. Die Murmeln der rechten Tasche sind dadurch eindeutig bestimmt.

$$\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}$$

$$= 1+8+28+56+70+56+28+8+1$$

$$= 256$$

Aufgabe 6.13

Wie viele Teilmengen hat eine n-elementige Menge?

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge)

$\mathcal{P}(A) = \{T \colon T \subset A\}$

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge)

$\mathcal{P}(A) = \{T\colon\ T \subset A\}$

$B = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ x_i \in \{0, 1\}\big\}$

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge)

$\mathcal{P}(A) = \{T\colon\ T \subset A\}$

$B = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_i \in \{0, 1\}\big\}$

Ordne jeder Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ wie folgt ein n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu:

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge)

$\mathcal{P}(A) = \{T\colon\ T \subset A\}$

$B = \big\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\colon\ x_i \in \{0,1\}\big\}$

Ordne jeder Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ wie folgt ein n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zu:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_i \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge)

$\mathcal{P}(A) = \{\,T\colon\; T \subset A\}$

$B = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\, x_i \in \{0, 1\}\big\}$

Ordne jeder Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ wie folgt ein n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_i \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist bijektiv – zu jedem n-Tupel in B gibt es genau eine Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ und umgekehrt.

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge)

$\mathcal{P}(A) = \{T\colon\ T \subset A\}$

$B = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_i \in \{0, 1\}\big\}$

Ordne jeder Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ wie folgt ein n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_i \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist bijektiv – zu jedem n-Tupel in B gibt es genau eine Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ und umgekehrt.

Wegen $|\mathcal{P}(A)| = |B|$ und $|B| = 2^n$ gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Aufgabe 6.14

Auf wie viele Arten können sich 7 Gäste auf 10 Stühle setzen?

Aufgabe 6.14

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 10!/3! = 604\,800$$

Aufgabe 6.15

Wie viele Möglichkeiten gibt es,

(a) 5 Autos (b) 11 Autos (c) 12 Autos

zu parkieren, wenn 12 Parkplätze frei sind?

Aufgabe 6.15

(a) $12!/(12-5)! = 95\,040$

(b) $12!/(12-11)! = 479\,001\,600$

(c) $12! = 479\,001\,600$

Aufgabe 6.16

Berechne ohne Taschenrechner:

(a) $\binom{143}{143}$ (b) $\binom{17}{16}$ (c) $\binom{101}{99}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!}$

Aufgabe 6.16

(a) $$\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143 - 143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$$

(b) $$\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17 - 16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!}$$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!} = 17$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!} = 17$

(c) $\binom{101}{99}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!} = 17$

(c) $\binom{101}{99} = \binom{101}{2}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!} = 17$

(c) $\binom{101}{99} = \binom{101}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2 \cdot 1}$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!} = 17$

(c) $\binom{101}{99} = \binom{101}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2 \cdot 1} = 101 \cdot 50$

Aufgabe 6.16

(a) $$\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$$

(b) $$\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!} = 17$$

(c) $$\binom{101}{99} = \binom{101}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2 \cdot 1} = 101 \cdot 50 = 5050$$

Aufgabe 6.17

Auf wie viele Arten kann man aus 11 Personen einen Viererausschuss wählen?

Aufgabe 6.17

Kombinationen ohne Wiederholung: $\binom{11}{4} = 330$

Aufgabe 6.18

An zwei Tischen gibt es drei bzw. vier freie Plätze. Auf wie viele Arten kann man sieben Gäste auf die beiden Tische verteilen?

Aufgabe 6.18

Zuerst wählt man 4 Personen für den ersten Tisch aus. Damit sind automatisch auch die Personen bestimmt, die am zweiten Tisch Platz nehmen müssen. Insgesamt:

$$\binom{7}{4} = 35$$

Aufgabe 6.19

Auf wie viele Arten kann man aus 10 Frauen und 5 Männern einen Ausschuss aus 6 Frauen und 3 Männern auswählen?

Aufgabe 6.19

$$\binom{10}{6} \cdot \binom{5}{3} = 2100$$

Aufgabe 6.20

In der Ebene sind 45 Punkte gegeben.

(a) Wie viele Geraden sind durch sie höchstens bestimmt?

(b) Wie viele Kreise sind durch sie höchstens bestimmt? Beachte, dass die Kreislinien durch die Punkte gehen.

Aufgabe 6.20

(a) Eine Gerade ist durch zwei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Geraden entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, zwei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

Aufgabe 6.20

(a) Eine Gerade ist durch zwei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Geraden entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, zwei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

$$\binom{45}{2} = 990$$

(Wenn jeweils mehr als zwei Punkte auf einer Geraden liegen, dann gibt es natürlich weniger Fälle)

Aufgabe 6.20

(a) Eine Gerade ist durch zwei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Geraden entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, zwei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

$$\binom{45}{2} = 990$$

(Wenn jeweils mehr als zwei Punkte auf einer Geraden liegen, dann gibt es natürlich weniger Fälle)

(b) Ein Kreis ist durch drei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Kreise entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, drei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

Aufgabe 6.20

(a) Eine Gerade ist durch zwei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Geraden entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, zwei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

$$\binom{45}{2} = 990$$

(Wenn jeweils mehr als zwei Punkte auf einer Geraden liegen, dann gibt es natürlich weniger Fälle)

(b) Ein Kreis ist durch drei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Kreise entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, drei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

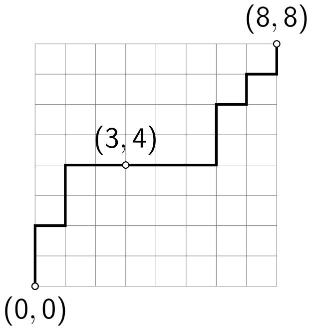
$$\binom{45}{3} = 14\,190$$

Aufgabe 6.21

Lehrer Frei wohnt in $(0,0)$ und arbeitet in $(8,8)$.

(a) Wie viele kürzeste Arbeitswege (wie den eingezeichneten) gibt es?

(b) Herr Frei nimmt jeden Morgen seine Kollegin mit, die in $(3,4)$ wohnt. Wie viele verschiedene Wege gibt es nun?



Aufgabe 6.21

(a) Wie oft geht man z. B. nach rechts?

Aufgabe 6.21

(a) Wie oft geht man z. B. nach rechts?

$$\binom{16}{8} = 12\,870$$

Aufgabe 6.21

(a) Wie oft geht man z. B. nach rechts?

$$\binom{16}{8} = 12\,870$$

(b) $\binom{7}{3} \cdot \binom{9}{5} = 4410$

Aufgabe 6.22

Auf wie viele Arten kann man aus 10 Basketballspielern zwei Fünfermannschaften bilden?

Aufgabe 6.22

Es gibt zwei richtige Resultate:

- Für das 1. Team wählt man 5 aus 10 Personen aus:

Aufgabe 6.22

Es gibt zwei richtige Resultate:

- Für das 1. Team wählt man 5 aus 10 Personen aus: $\binom{10}{5} = 252.$

Aufgabe 6.22

Es gibt zwei richtige Resultate:

- Für das 1. Team wählt man 5 aus 10 Personen aus:

  $$\binom{10}{5} = 252.$$

  Damit sind die übrigen 5 Personen im zweiten Team

Aufgabe 6.22

Es gibt zwei richtige Resultate:

- Für das 1. Team wählt man 5 aus 10 Personen aus:

  $$\binom{10}{5} = 252.$$

  Damit sind die übrigen 5 Personen im zweiten Team

  Wenn wir also zwischen einer ersten und einer zweiten Mannschaft unterscheiden, dann ergibt es 252 Möglichkeiten.

Aufgabe 6.22

Es gibt zwei richtige Resultate:

- Für das 1. Team wählt man 5 aus 10 Personen aus:

  $$\binom{10}{5} = 252.$$

  Damit sind die übrigen 5 Personen im zweiten Team

  Wenn wir also zwischen einer ersten und einer zweiten Mannschaft unterscheiden, dann ergibt es 252 Möglichkeiten.

- Wenn wir nicht zwischen einer ersten und einer zweiten Mannschaft unterscheiden, so wurde oben jede Aufteilung doppelt gezählt; also gibt es in diesem Fall nur 126 Möglichkeiten.

Aufgabe 6.23

Aus wie vielen Personen besteht eine Gesellschaft, wenn beim Anstossen 190 mal die Gläser klingen?

Aufgabe 6.23

$$\begin{aligned}
\binom{x}{2} &= 190 \\
\frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} &= 190 \\
x^2 - x &= 380 \\
x^2 - x - 380 &= 0 \\
x &= 20 \\
x &= -19 \quad \text{Unsinn}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.24

Auf wie viele Arten kann man 12 gleiche Tafeln Schokolade auf 3 Kinder verteilen, wenn kein Kind leer ausgehen soll?

Aufgabe 6.24

Zuerst jedem Kind je ein Tafel geben, erst dann die restlichen 9 Tafeln verteilen:

Aufgabe 6.24

Zuerst jedem Kind je ein Tafel geben, erst dann die restlichen 9 Tafeln verteilen:

$$1 \cdot \binom{9+2}{2}$$

Aufgabe 6.24

Zuerst jedem Kind je ein Tafel geben, erst dann die restlichen 9 Tafeln verteilen:

$$1 \cdot \binom{9+2}{2} = 55$$

Aufgabe 6.25

Ein Eishockeyspiel endet mit 8 : 5. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Drittelsresultate?

Aufgabe 6.25

Die gesamte Torzahl jeder Mannschaft wird durch die zwei Pausen in drei Torgruppen aufgeteilt. Zum Beispiel so:

Aufgabe 6.25

Die gesamte Torzahl jeder Mannschaft wird durch die zwei Pausen in drei Torgruppen aufgeteilt. Zum Beispiel so:

Heimmannschaft:	`TT|TTT|TTT`
Gäste:	`TTT||TT`

Aufgabe 6.25

Die gesamte Torzahl jeder Mannschaft wird durch die zwei Pausen in drei Torgruppen aufgeteilt. Zum Beispiel so:

Heimmannschaft:	`TT|TTT|TTT`
Gäste:	`TTT||TT`

Da jedes Ergebnis der einen Mannschaft mit jedem Ergebnis der Anderen Mannschaft „kombiniert“ werden kann, erhalten wir folgende Anzahl möglicher Zwischenresultate:

Aufgabe 6.25

Die gesamte Torzahl jeder Mannschaft wird durch die zwei Pausen in drei Torgruppen aufgeteilt. Zum Beispiel so:

Heimmannschaft:	`TT|TTT|TTT`
Gäste:	`TTT||TT`

Da jedes Ergebnis der einen Mannschaft mit jedem Ergebnis der Anderen Mannschaft „kombiniert“ werden kann, erhalten wir folgende Anzahl möglicher Zwischenresultate:

$$\binom{8+2}{2} \cdot \binom{5+2}{2}$$

Aufgabe 6.25

Die gesamte Torzahl jeder Mannschaft wird durch die zwei Pausen in drei Torgruppen aufgeteilt. Zum Beispiel so:

Heimmannschaft:	`TT|TTT|TTT`
Gäste:	`TTT||TT`

Da jedes Ergebnis der einen Mannschaft mit jedem Ergebnis der Anderen Mannschaft „kombiniert“ werden kann, erhalten wir folgende Anzahl möglicher Zwischenresultate:

$$\binom{8+2}{2} \cdot \binom{5+2}{2} = 945$$

Aufgabe 6.26

Auf wie viele Arten kann man 54 Parlamentssitze auf vier Parteien verteilen?

Aufgabe 6.26

Es handelt sich um Kombinationen mit Wiederholungen (theoretisch wäre auch ein Einparteiensystem möglich).

Aufgabe 6.26

Es handelt sich um Kombinationen mit Wiederholungen (theoretisch wäre auch ein Einparteiensystem möglich).

$$\binom{54+3}{3} = 29\,260$$

Aufgabe 6.27

(a) Wie viele Diagonalen hat ein regelmässiges 37-Eck?

(b) Wie viele Diagonalen hat allgemein ein regelmässiges n-Eck?

Aufgabe 6.27

Jede der 37 Ecken kann mit $37 - 3 = 34$ anderen Ecken verbunden werden, denn die Ecke selbst und ihre beiden Nachbarn kommen als Diagonalendpunkte nicht in Frage. Dabei wird jede Diagonale doppelt gezählt. Also gibt es $37 \cdot 34/2 = 629$ Diagonalen.

Aufgabe 6.27

Jede der 37 Ecken kann mit $37 - 3 = 34$ anderen Ecken verbunden werden, denn die Ecke selbst und ihre beiden Nachbarn kommen als Diagonalendpunkte nicht in Frage. Dabei wird jede Diagonale doppelt gezählt. Also gibt es $37 \cdot 34/2 = 629$ Diagonalen.

Eine andere Lösung ist die: Man bestimmt zunächst alle möglichen Verbindungssstrecken zwischen den 37 Punkten:

Aufgabe 6.27

Jede der 37 Ecken kann mit $37 - 3 = 34$ anderen Ecken verbunden werden, denn die Ecke selbst und ihre beiden Nachbarn kommen als Diagonalendpunkte nicht in Frage. Dabei wird jede Diagonale doppelt gezählt. Also gibt es $37 \cdot 34/2 = 629$ Diagonalen.

Eine andere Lösung ist die: Man bestimmt zunächst alle möglichen Verbindungssstrecken zwischen den 37 Punkten:

$$\binom{37}{2} = 666.$$

Aufgabe 6.27

Jede der 37 Ecken kann mit $37 - 3 = 34$ anderen Ecken verbunden werden, denn die Ecke selbst und ihre beiden Nachbarn kommen als Diagonalendpunkte nicht in Frage. Dabei wird jede Diagonale doppelt gezählt. Also gibt es $37 \cdot 34/2 = 629$ Diagonalen.

Eine andere Lösung ist die: Man bestimmt zunächst alle möglichen Verbindungssstrecken zwischen den 37 Punkten:

$$\binom{37}{2} = 666.$$

Darunter sind auch die Strecken benachbarter Punkte, welche gerade die 37 Seiten des 37-Ecks sind. Also $666 - 37 = 629$ Diagonalen.

Allgemein: $\dfrac{n(n-3)}{2}$ oder $\dbinom{n}{2} - n$

Aufgabe 6.28

Eine Klasse mit 10 Schülerinnen und 8 Schülern möchte eine vierköpfige Delegation bilden, in der beide Geschlechter vertreten sein sollen. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2}$$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{10}{3} \cdot \binom{8}{1}$$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{10}{3} \cdot \binom{8}{1} = 560 + 1260 + 960 = 2780$$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{3}+\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}+\binom{10}{3}\cdot\binom{8}{1}=560+1260+960=2780$$

Subtraktive Lösung:

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{10}{3} \cdot \binom{8}{1} = 560 + 1260 + 960 = 2780$$

Subtraktive Lösung:

$$\binom{18}{4}$$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{10}{3} \cdot \binom{8}{1} = 560 + 1260 + 960 = 2780$$

Subtraktive Lösung:

$$\binom{18}{4} - \binom{10}{0} \cdot \binom{8}{4}$$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{3}+\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}+\binom{10}{3}\cdot\binom{8}{1} = 560+1260+960 = 2780$$

Subtraktive Lösung:

$$\binom{18}{4}-\binom{10}{0}\cdot\binom{8}{4}-\binom{10}{4}\cdot\binom{8}{0}$$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{3}+\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}+\binom{10}{3}\cdot\binom{8}{1}=560+1260+960=2780$$

Subtraktive Lösung:

$$\binom{18}{4}-\binom{10}{0}\cdot\binom{8}{4}-\binom{10}{4}\cdot\binom{8}{0}=3060-70-210$$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{3}+\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}+\binom{10}{3}\cdot\binom{8}{1} = 560+1260+960 = 2780$$

Subtraktive Lösung:

$$\binom{18}{4}-\binom{10}{0}\cdot\binom{8}{4}-\binom{10}{4}\cdot\binom{8}{0} = 3060-70-210 = 2780$$

Aufgabe 6.29

Am Sporttag trägt jeder Schüler einer 15-köpfigen Klasse eine Startnummer. Es gibt 6 rote, 5 blaue und 4 gelbe Startnummern, die fortlaufenden Nummern versehen sind.

(a) Auf wie viele Arten können die Leibchen auf die Klasse verteilt werden?

(b) Wie gross ist die Anzahl Verteilungsmöglichkeiten, wenn André, Brigitte und Christian blaue Startnummern tragen?

Aufgabe 6.29

(a) Auf $15! \approx 1.31 \cdot 10^{12}$ Arten
Wegen der Nummern spielen die Farben hier keine Rolle.

Aufgabe 6.29

(a) Auf $15! \approx 1.31 \cdot 10^{12}$ Arten
Wegen der Nummern spielen die Farben hier keine Rolle.

(b) André, Brigitte und Christian: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/2! = 60$

Aufgabe 6.29

(a) Auf $15! \approx 1.31 \cdot 10^{12}$ Arten
Wegen der Nummern spielen die Farben hier keine Rolle.

(b) André, Brigitte und Christian: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/2! = 60$

Die restlichen 12 Schüler: $12!$ Möglichkeiten

Aufgabe 6.29

(a) Auf $15! \approx 1.31 \cdot 10^{12}$ Arten
Wegen der Nummern spielen die Farben hier keine Rolle.

(b) André, Brigitte und Christian: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/2! = 60$

Die restlichen 12 Schüler: $12!$ Möglichkeiten

Produktregel: $60 \cdot 12! = 28\,740\,096\,000$ Möglichkeiten.

Aufgabe 6.30

Am Sporttag trägt jeder Schüler einer 15-köpfigen Klasse ein T-Shirt mit dem Logo der Schule. Es gibt 6 rote, 5 blaue und 4 gelbe T-Shirts.

(a) Auf wie viele Arten können die Leibchen auf die Klasse verteilt werden?

(b) Wie gross ist die Anzahl Verteilungsmöglichkeiten, wenn André, Brigitte und Christian blaue Leibchen tragen?

Aufgabe 6.30

(a) Zuerst werden 6 Schüler für die roten T-Shirts ausgewählt, dann 5 Schüler für die blauen T-Shirts und die übrigen bekommen die gelben:

Aufgabe 6.30

(a) Zuerst werden 6 Schüler für die roten T-Shirts ausgewählt, dann 5 Schüler für die blauen T-Shirts und die übrigen bekommen die gelben:

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} = 630\,630$$

Aufgabe 6.30

(a) Zuerst werden 6 Schüler für die roten T-Shirts ausgewählt, dann 5 Schüler für die blauen T-Shirts und die übrigen bekommen die gelben:

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} = 630\,630$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{15!}{6! \cdot 5! \cdot 4!} = 630\,630$

Aufgabe 6.30

(a) Zuerst werden 6 Schüler für die roten T-Shirts ausgewählt, dann 5 Schüler für die blauen T-Shirts und die übrigen bekommen die gelben:

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} = 630\,630$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{15!}{6! \cdot 5! \cdot 4!} = 630\,630$

(b) André, Brigitte und Christian erhalten blaue T-Shirts und da diese nicht unterscheidbar sind, geht dies auf genau eine Weise. Die übrigen 12 Schüler erhalten noch 6 rote, 2 blaue und und 4 gelbe T-Shirts:

Aufgabe 6.30

(a) Zuerst werden 6 Schüler für die roten T-Shirts ausgewählt, dann 5 Schüler für die blauen T-Shirts und die übrigen bekommen die gelben:

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} = 630\,630$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{15!}{6! \cdot 5! \cdot 4!} = 630\,630$

(b) André, Brigitte und Christian erhalten blaue T-Shirts und da diese nicht unterscheidbar sind, geht dies auf genau eine Weise. Die übrigen 12 Schüler erhalten noch 6 rote, 2 blaue und und 4 gelbe T-Shirts:

$$\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 13\,860$$

Aufgabe 6.30

(a) Zuerst werden 6 Schüler für die roten T-Shirts ausgewählt, dann 5 Schüler für die blauen T-Shirts und die übrigen bekommen die gelben:

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} = 630\,630$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{15!}{6! \cdot 5! \cdot 4!} = 630\,630$

(b) André, Brigitte und Christian erhalten blaue T-Shirts und da diese nicht unterscheidbar sind, geht dies auf genau eine Weise. Die übrigen 12 Schüler erhalten noch 6 rote, 2 blaue und und 4 gelbe T-Shirts:

$$\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 13\,860$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{12!}{6! \cdot 2! \cdot 4!} = 13\,860$

Aufgabe 6.31

Wie viele verschiedene Wörter kann man mit den 13 Buchstaben des Wortes

ANTEATEREATER

bilden?

Aufgabe 6.31

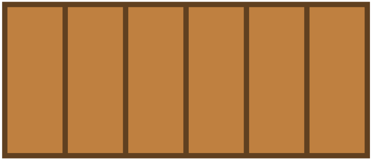
Häufigkeiten der Buchstaben:

A	N	T	E	R
3	1	3	4	2

Permutationen mit Wiederholungen: $\dfrac{13!}{3! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!} = 3\,603\,600$

Aufgabe 6.32

Eine Tafel Schokolade besitzt fünf Rillen, an denen sie gebrochen werden kann.



Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Schokolade

(a) in drei Teile (b) in vier Teile (c) irgendwie

entlang der Rillen zu zerlegen?

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2}$$

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{3}$$

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(c) Die Schokolade muss 1–5 mal gebrochen werden:

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(c) Die Schokolade muss 1–5 mal gebrochen werden:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(c) Die Schokolade muss 1–5 mal gebrochen werden:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 31 \text{ Möglichkeiten}$$

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(c) Die Schokolade muss 1–5 mal gebrochen werden:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 31 \text{ Möglichkeiten}$$

subtraktive Lösung: $2^5 - \binom{5}{0} = 32 - 1 = 31$

Aufgabe 6.33

Auf einem Parkplatz sind noch 6 Parkplätze frei. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die freien Parkplätze den ankommenden Autos zuzuteilen, wenn

(a) 3 Autos, (b) 6 Autos, (c) 8 Autos

ankommen?

Aufgabe 6.33

Die gleichzeitige Ankunft ist unwesentlich; wir können die Autos auch nacheinander ankommen und so die Parkplätze wählen lassen. Es handelt sich jeweils um Variationen ohne Wiederholungen.

(a) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

(b) $6! = 720$

(c) $8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 = 20\,160$

Aufgabe 6.34 (Jassen)

(a) Die Herren Amberg, Brechbühl, Christinger und Dietler jassen einen Schieber. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 36 Karten gleichmässig auf die vier Spieler aufzuteilen?

(b) Herr Dietler ist krank und die andern spielen zu dritt. Jeder bekommt 12 Karten. Gibt es nun mehr oder weniger Verteilungsmöglichkeiten als beim Schieber?

(c) Wie viele Verteilungen beim Schieber gibt es, bei denen Amberg vier Nell (d. h. vier Neuner) und Dietler vier Bauern hat?

Aufgabe 6.34

(a) Produktregel:

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \approx 2.15 \cdot 10^{19} \text{ Möglichkeiten.}$$

Aufgabe 6.34

(a) Produktregel:

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \approx 2.15 \cdot 10^{19} \text{ Möglichkeiten.}$$

(b) Es sind weniger, denn wie bei (a) berechnen wir:

Aufgabe 6.34

(a) Produktregel:

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \approx 2.15 \cdot 10^{19} \text{ Möglichkeiten.}$$

(b) Es sind weniger, denn wie bei (a) berechnen wir:

$$\binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12} \cdot \binom{12}{12} \approx 3.385 \cdot 10^{15}$$

Aufgabe 6.34

(a) Produktregel:

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \approx 2.15 \cdot 10^{19} \text{ Möglichkeiten.}$$

(b) Es sind weniger, denn wie bei (a) berechnen wir:

$$\binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12} \cdot \binom{12}{12} \approx 3.385 \cdot 10^{15}$$

(c) Hat A vier Nell und D vier Bauern, so sind noch 28 Karten zu verteilen. Produktregel:

Aufgabe 6.34

(a) Produktregel:

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \approx 2.15 \cdot 10^{19} \text{ Möglichkeiten.}$$

(b) Es sind weniger, denn wie bei (a) berechnen wir:

$$\binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12} \cdot \binom{12}{12} \approx 3.385 \cdot 10^{15}$$

(c) Hat A vier Nell und D vier Bauern, so sind noch 28 Karten zu verteilen. Produktregel:

$$\binom{28}{5} \cdot \binom{23}{9} \cdot \binom{14}{9} \approx 1.61 \cdot 10^{14} \text{ Möglichkeiten.}$$

Aufgabe 6.35

Drei Studentinnen und zwei Studenten fahren mit einem Auto in die Ferien. Nur zwei Studentinnen haben einen Führerschein. Wie viele Sitzverteilungen gibt es, wenn es genau 5 Plätze im Auto gibt?

Aufgabe 6.35

Fahrerin:	$2! = 2$ Sitzverteilungen
übrige Mitfahrende:	$4! = 24$ Sitzverteilungen
Insgesamt	$2 \cdot 4! = 48$ Sitzverteilungen

Aufgabe 6.36

Eine Fahrschülerin muss bei einer Prüfung 8 von 12 Fragen beantworten.

(a) Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat sie?
(b) Wie viele Auswahlmöglichkeiten bleiben ihr, wenn sie die ersten vier Fragen beantworten muss?
(c) Wie viele Möglichkeiten bleiben ihr, wenn sie genau vier von den ersten sieben Fragen beantworten muss?
(d) Wie viele Möglichkeiten bleiben ihr, wenn sie mindestens vier von den ersten sieben Fragen beantworten muss?

Aufgabe 6.36

(a) Aus 12 Fragen 8 auswählen: $\binom{12}{8} = 495$

(b) Aus den ersten 4 Fragen 4 wählen und aus den verbleibenden 8 Fragen weitere 4 wählen: $\binom{4}{4} \cdot \binom{8}{4} = 70$

(c) Aus den ersten 7 Fragen 4 wählen und aus den verbleibenden 5 Fragen weitere 4 wählen: $\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{4} = 175$

(d) Genau 4 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{4} = 175$
Genau 5 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{5} \cdot \binom{5}{3} = 210$
Genau 6 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{6} \cdot \binom{5}{2} = 70$
Genau 7 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{7} \cdot \binom{5}{1} = 5$
Mit der Summenregel ergibt das 460 Möglichkeiten

Aufgabe 6.37

(a) Auf wie viele Arten können 17 Skifahrer auf drei Gondeln verteilt werden, wenn alle drei Gondeln für sämtliche Personen genügend Platz hätten?

(b) Wie viele Möglichkeiten verbleiben, wenn die eine Gondel noch 6, die zweite noch 4 und die dritte noch 7 freie Plätze haben?

(c) Wie viele Möglichkeiten verbleiben, wenn ausserdem (neben den Bedingungen von Teilaufgabe (b) die beiden Freundinnen Nicole und Ruth zusammen in der gleichen Gondel fahren möchten?

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Anzahl Verteilungen 3. Gondel: $\binom{7}{7} = 1$

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Anzahl Verteilungen 3. Gondel: $\binom{7}{7} = 1$

Produktregel: $4\,084\,080$ Verteilungen.

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Anzahl Verteilungen 3. Gondel: $\binom{7}{7} = 1$

Produktregel: $4\,084\,080$ Verteilungen.

(c) N. und R. in der 1. Gondel: $\binom{15}{4} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{7}$ $\quad 450\,450$

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Anzahl Verteilungen 3. Gondel: $\binom{7}{7} = 1$

Produktregel: $4\,084\,080$ Verteilungen.

(c) N. und R. in der 1. Gondel: $\binom{15}{4} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{7}$ $450\,450$

N. und R. in der 2. Gondel: $\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{7}$ $180\,180$

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Anzahl Verteilungen 3. Gondel: $\binom{7}{7} = 1$

Produktregel: 4 084 080 Verteilungen.

(c)

N. und R. in der 1. Gondel:	$\binom{15}{4} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{7}$	450 450
N. und R. in der 2. Gondel:	$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{7}$	180 180
N. und R. in der 3. Gondel:	$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$	630 630

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Anzahl Verteilungen 3. Gondel: $\binom{7}{7} = 1$

Produktregel: 4 084 080 Verteilungen.

(c)

N. und R. in der 1. Gondel:	$\binom{15}{4} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{7}$	450 450
N. und R. in der 2. Gondel:	$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{7}$	180 180
N. und R. in der 3. Gondel:	$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$	630 630
Insgesamt		1 261 260

Aufgabe 7.1

Mit einem idealen Spielwürfel wird dreimal gewürfelt. Die Zufallsgrösse X wird durch die Summe der Augenzahlen definiert. Berechne

(a) $P(X = 6)$

(b) $P(X > 18)$

(c) $P(X \leq 4)$

Aufgabe 7.1

X: Die Summe der Augenzahlen bei dreimaligem Würfeln

Aufgabe 7.1

X: Die Summe der Augenzahlen bei dreimaligem Würfeln

(a) $P(X=6) = 3 \cdot P(1,1,4) + 6 \cdot P(1,2,3) + P(2,2,2)$

$$= \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

Aufgabe 7.1

X: Die Summe der Augenzahlen bei dreimaligem Würfeln

(a) $$P(X = 6) = 3 \cdot P(1,1,4) + 6 \cdot P(1,2,3) + P(2,2,2)$$
$$= \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

(b) $P(X > 18) = 0$

Aufgabe 7.1

X: Die Summe der Augenzahlen bei dreimaligem Würfeln

(a) $$\begin{aligned} P(X=6) &= 3 \cdot P(1,1,4) + 6 \cdot P(1,2,3) + P(2,2,2) \\ &= \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108} \end{aligned}$$

(b) $P(X > 18) = 0$

(c) $$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= P(X=3) + P(X=4) \\ &= P(1,1,1) + 3P(1,1,2) \\ &= \frac{1}{216} + \frac{3}{216} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

Auf einen Stichprobenraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ist folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben:

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$P(\{\omega_i\})$	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1

Darüber hinaus ist folgende Zufallsvariable X auf Ω definiert:

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$X(\omega_i)$	2	3	5	2	1

Berechne:

(a) $P(X = 2)$ (b) $P(X > 3)$ (c) $P(X^2 < 5)$

Aufgabe 7.2

(a) $P(X = 2) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

Aufgabe 7.2

(a) $P(X = 2) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

(b) $P(X > 4) = P(\{\omega_3\}) = 0.2$

Aufgabe 7.2

(a) $P(X = 2) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

(b) $P(X > 4) = P(\{\omega_3\}) = 0.2$

(c) $$\begin{aligned} P(X^2 < 5) &= P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_5\}) \\ &= 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

Für einen idealen Spielwürfel sei X sei die Anzahl der Würfe bis zum ersten Erscheinen der Augenzahl 6. Berechne:

(a) $P(X = 4)$ (b) $P(X \leq 7)$ (c) $P(X > 9)$

Aufgabe 7.3

(a) $P(X = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$

Aufgabe 7.3

(a) $P(X = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$

(b) $$\begin{aligned} P(X \leq 7) &= P(1) + P(2) + \cdots + P(7) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7}{1 - \frac{5}{6}} = 0.7209 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

(a) $P(X=4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$

(b) $$\begin{aligned} P(X \leq 7) &= P(1) + P(2) + \cdots + P(7) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7}{1 - \frac{5}{6}} = 0.7209 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} P(X > 9) &= 1 - P(X \leq 9) \\ &= 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^9}{1 - \frac{5}{6}} = 0.1938 \end{aligned}$$ SJ17/18: 0.1615

Aufgabe 7.4

Bei einem unfairen Spiel gewinnt ein Spieler mit der Wahrscheinlickeit von 0.48 einen Franken. Das Spiel wird 8-mal durchgeführt. X sei der Gesamtgewinn in Franken. Berechne:

(a) $P(X = 4)$

(b) $P(X \leq 3)$

(c) $P(X > 5)$

Aufgabe 7.4

(a) $P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot 0.48^4 \cdot 0.52^4 = 0.2717$

Aufgabe 7.4

(a) $P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot 0.48^4 \cdot 0.52^4 = 0.2717$

(b) $P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{8}{k} \cdot 0.48^k \cdot 0.52^{8-k} = 0.4078$

Aufgabe 7.4

(a) $P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot 0.48^4 \cdot 0.52^4 = 0.2717$

(b) $P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{8}{k} \cdot 0.48^k \cdot 0.52^{8-k} = 0.4078$

(c) $$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{8}{k} \cdot 0.48^k \cdot 0.52^{8-k} = 0.1198 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.5

In einer Schachtel befinden sich 20 rote und 10 weisse Kugeln. Es werden zufällig und ohne Zurücklegen 7 Kugeln gezogen. X ist die Anzahl der roten Kugeln unter den gezogenen.

(a) $P(X = 4)$ (b) $P(X = 8)$ (c) $P(X < 3)$

Hinweis: Da es sich um ein Auswahlproblem handelt, können die günstigen und möglichen Fälle des Experiments mit Hilfe geeigneter Binomialkoeffizienten bestimmt werden.

Aufgabe 7.5

(a) $P(X=4) = \dfrac{\binom{20}{4}\binom{10}{3}}{\binom{30}{7}} = \dfrac{323}{1131}$

Aufgabe 7.5

(a) $P(X = 4) = \dfrac{\binom{20}{4}\binom{10}{3}}{\binom{30}{7}} = \dfrac{323}{1131}$

(b) $P(X = 8) = 0$

Aufgabe 7.5

(a) $P(X = 4) = \dfrac{\binom{20}{4}\binom{10}{3}}{\binom{30}{7}} = \dfrac{323}{1131}$

(b) $P(X = 8) = 0$

(c) $$P(X < 3) = \frac{\binom{20}{0}\binom{10}{7}}{\binom{30}{7}} + \frac{\binom{20}{1}\binom{10}{6}}{\binom{30}{7}} + \frac{\binom{20}{2}\binom{10}{5}}{\binom{30}{7}}$$

$$= \frac{1}{39}$$

Aufgabe 7.6

An der Expresskasse eines Supermarkts treffen während der Hauptverkaufszeit innerhalb von 30 Minuten durchschnittlich 18 Kunden ein.

X sei die Anzahl der Kunden, die während der Stosszeit in einem 10 Minuten-Intervall an der Expreskasse bezahlen. Berechne

(a) $P(X = 5)$ (b) $P(X \leq 5)$ (c) $P(X > 5)$ (d) $P(X = 0)$

Aufgabe 7.6

Poisson-Parameter für 30 Minuten: $\lambda = 18$

Aufgabe 7.6

Poisson-Parameter für 30 Minuten: $\lambda = 18$

Poisson-Parameter für 10 Minuten: $\lambda = 6$

Aufgabe 7.6

Poisson-Parameter für 30 Minuten: $\lambda = 18$

Poisson-Parameter für 10 Minuten: $\lambda = 6$

(a) $P(X = 5) = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^5}{5!} = 0.1606$

Aufgabe 7.6

Poisson-Parameter für 30 Minuten: $\lambda = 18$

Poisson-Parameter für 10 Minuten: $\lambda = 6$

(a) $P(X = 5) = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^5}{5!} = 0.1606$

(b) $P(X \leq 5) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k!} = 0.4457$

Aufgabe 7.6

Poisson-Parameter für 30 Minuten: $\lambda = 18$

Poisson-Parameter für 10 Minuten: $\lambda = 6$

(a) $P(X = 5) = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^5}{5!} = 0.1606$

(b) $P(X \leq 5) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k!} = 0.4457$

(c) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 0.5543$

Aufgabe 7.6

Poisson-Parameter für 30 Minuten: $\lambda = 18$

Poisson-Parameter für 10 Minuten: $\lambda = 6$

(a) $P(X = 5) = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^5}{5!} = 0.1606$

(b) $P(X \leq 5) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k!} = 0.4457$

(c) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 0.5543$

(d) $P(X = 0) = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!} = 0.002479$

Aufgabe 7.7

In einer Schachtel liegen insgesamt 5 Kugeln.

- Auf 3 Kugeln ist die Zahl 1 aufgedruckt.
- Auf 2 Kugeln ist die Zahl 6 aufgedruckt.

(a) Es wird eine Kugel gezogen. X sei ihr aufgedruckter Wert. Berechne $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(b) Es werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Y sei die Summe der aufgedruckten Werte. Berechne $\mathrm{E}(Y)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

(c) Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Z sei die Summe der aufgedruckten Werte. Berechne $\mathrm{E}(Z)$ und $\mathrm{Var}(Z)$.

Aufgabe 7.7

(a) $\mathsf{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

Aufgabe 7.7

(a) $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$\mathrm{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

Aufgabe 7.7

(a) $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$\mathrm{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 15 - 9 = 6$

Aufgabe 7.7

(a) $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$\mathrm{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 15 - 9 = 6$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 2 \cdot \frac{9}{25} + 7 \cdot \frac{12}{25} + 12 \cdot \frac{4}{25} = 6$

Aufgabe 7.7

(a) $E(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$E(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 15 - 9 = 6$

(b) $E(Y) = 2 \cdot \frac{9}{25} + 7 \cdot \frac{12}{25} + 12 \cdot \frac{4}{25} = 6$

$E(Y^2) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 49 \cdot \frac{12}{25} + 144 \cdot \frac{4}{25} = 48$

Aufgabe 7.7

(a) $E(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$E(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 15 - 9 = 6$

(b) $E(Y) = 2 \cdot \frac{9}{25} + 7 \cdot \frac{12}{25} + 12 \cdot \frac{4}{25} = 6$

$E(Y^2) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 49 \cdot \frac{12}{25} + 144 \cdot \frac{4}{25} = 48$

$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 48 - 36 = 12$

Aufgabe 7.7

(a) $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$\mathrm{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 15 - 9 = 6$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 2 \cdot \frac{9}{25} + 7 \cdot \frac{12}{25} + 12 \cdot \frac{4}{25} = 6$

$\mathrm{E}(Y^2) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 49 \cdot \frac{12}{25} + 144 \cdot \frac{4}{25} = 48$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 = 48 - 36 = 12$

(c) $\mathrm{E}(Z) = 2 \cdot \frac{6}{20} + 7 \cdot \frac{12}{20} + 12 \cdot \frac{2}{20} = 6$

Aufgabe 7.7

(a) $E(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$E(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 15 - 9 = 6$

(b) $E(Y) = 2 \cdot \frac{9}{25} + 7 \cdot \frac{12}{25} + 12 \cdot \frac{4}{25} = 6$

$E(Y^2) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 49 \cdot \frac{12}{25} + 144 \cdot \frac{4}{25} = 48$

$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 48 - 36 = 12$

(c) $E(Z) = 2 \cdot \frac{6}{20} + 7 \cdot \frac{12}{20} + 12 \cdot \frac{2}{20} = 6$

$E(Z^2) = 4 \cdot \frac{6}{20} + 49 \cdot \frac{12}{20} + 144 \cdot \frac{2}{20} = 45$

Aufgabe 7.7

(a) $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$\mathrm{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 15 - 9 = 6$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 2 \cdot \frac{9}{25} + 7 \cdot \frac{12}{25} + 12 \cdot \frac{4}{25} = 6$

$\mathrm{E}(Y^2) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 49 \cdot \frac{12}{25} + 144 \cdot \frac{4}{25} = 48$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 = 48 - 36 = 12$

(c) $\mathrm{E}(Z) = 2 \cdot \frac{6}{20} + 7 \cdot \frac{12}{20} + 12 \cdot \frac{2}{20} = 6$

$\mathrm{E}(Z^2) = 4 \cdot \frac{6}{20} + 49 \cdot \frac{12}{20} + 144 \cdot \frac{2}{20} = 45$

$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 = 45 - 36 = 9$

Aufgabe 7.8

X ist die wie folgt definierte Zufallsvariable für ein Bernoulli-Experiment:

$P(X = 1) = 0.6$

$P(X = 0) = 0.4$

Berechne $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 7.8

$$E(X) = 1 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0.6$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot 0.6 + 0^2 \cdot 0.4 = 0.6$$

$$\mathrm{Var}(X) = 0.6 - 0.6^2 = 0.24$$

Aufgabe 7.9

In einem Quiz werden einer Person zwei Fragen gestellt und sie muss entscheiden, welche sie zuerst beantworten will.

Die Person kann Frage 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8 richtig beantworten. Dann gewinnt sie einen Preis von CHF 100.–. Frage 2 kann sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 richtig beantworten. Hier gewinnt sie bei der richtigen Antwort CHF 200.–.

Wenn die zuerst gewählte Frage falsch beantwortet wird, endet das Quiz und die Person geht leer aus. Andernfalls erhält sie das entsprechende Preisgeld gutgeschrieben und darf zur zweiten Frage gehen.

Wird die zweite Frage falsch beantwortet, erfolgt die Auszahlung des Preisgelds für die erste Frage. Bei der richtigen Antwort erhält die Person die Summe der beiden Preisgelder.

Welche der beiden Fragen sollt die Kandidatin zuerst beantworten, wenn sie ihren Gewinn unter den oben genannten Voraussetzungen optimieren möchte?

Aufgabe 7.9

X: Gesamtgewinn

- Frage 1 zuerst:

x	0	100	300
$p(X = x)$	0.2	$0.8 \cdot 0.5$	$0.8 \cdot 0.5$

Aufgabe 7.9

X: Gesamtgewinn

- Frage 1 zuerst:

x	0	100	300
$p(X = x)$	0.2	$0.8 \cdot 0.5$	$0.8 \cdot 0.5$

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.4 + 300 \cdot 0.4 = 160$$

Aufgabe 7.9

X: Gesamtgewinn

- Frage 1 zuerst:

x	0	100	300
$p(X = x)$	0.2	$0.8 \cdot 0.5$	$0.8 \cdot 0.5$

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.4 + 300 \cdot 0.4 = 160$$

- Frage 2 zuerst:

x	0	200	300
$p(X = x)$	0.5	$0.5 \cdot 0.2$	$0.5 \cdot 0.8$

Aufgabe 7.9

X: Gesamtgewinn

- Frage 1 zuerst:

x	0	100	300
$p(X = x)$	0.2	$0.8 \cdot 0.5$	$0.8 \cdot 0.5$

$$E(X) = 0 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.4 + 300 \cdot 0.4 = 160$$

- Frage 2 zuerst:

x	0	200	300
$p(X = x)$	0.5	$0.5 \cdot 0.2$	$0.5 \cdot 0.8$

$$E(X) = 0 \cdot 0.5 + 200 \cdot 0.1 + 300 \cdot 0.4 = 140$$

Aufgabe 7.9

X: Gesamtgewinn

- Frage 1 zuerst:

x	0	100	300
$p(X = x)$	0.2	$0.8 \cdot 0.5$	$0.8 \cdot 0.5$

$$E(X) = 0 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.4 + 300 \cdot 0.4 = 160$$

- Frage 2 zuerst:

x	0	200	300
$p(X = x)$	0.5	$0.5 \cdot 0.2$	$0.5 \cdot 0.8$

$$E(X) = 0 \cdot 0.5 + 200 \cdot 0.1 + 300 \cdot 0.4 = 140$$

Man sollte mit Frage 1 beginnen.

Aufgabe 7.10

Von einer Zufallsgrösse X sind die Werte

x	1	a	b	0
$P(X = x)$	0.4	0.2	0.3	c

sowie der Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = 0.5$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X) = 1.25$ bekannt. Bestimme a, b und c.

Aufgabe 7.10

- $c = 0.1$

Aufgabe 7.10

- $c = 0.1$
- $$\mathrm{E}(X) = 0.5$$

Aufgabe 7.10

- $c = 0.1$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0.5 \\ 1 \cdot 0.4 + a \cdot 0.2 + b \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 &= 0.5 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.10

- $c = 0.1$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0.5 \\ 1 \cdot 0.4 + a \cdot 0.2 + b \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 &= 0.5 \\ 0.2a + 0.3b &= 0.1 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.10

- $c = 0.1$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0.5 \\ 1 \cdot 0.4 + a \cdot 0.2 + b \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 &= 0.5 \\ 0.2a + 0.3b &= 0.1 \\ a &= 0.5 - 1.5b \end{aligned}$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\mathrm{Var}(X) = 1.25$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\ \mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \end{aligned}$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\ \mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\ 0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \end{aligned}$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\ \mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\ 0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\ 0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \end{aligned}$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\
\mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\
0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\
0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\
2a^2 + 3b^2 &= 11
\end{aligned}$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\
\mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\
0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\
0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\
2a^2 + 3b^2 &= 11 \\
2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11
\end{aligned}$$

- $E(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\
E(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\
0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\
0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\
2a^2 + 3b^2 &= 11 \\
2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11 \\
4.5b^2 - 3b + 0.5 + 3b^2 &= 11
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\
\mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\
0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\
0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\
2a^2 + 3b^2 &= 11 \\
2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11 \\
4.5b^2 - 3b + 0.5 + 3b^2 &= 11 \\
7.5b^2 - 3b - 10.5 &= 0
\end{aligned}$$

- $E(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\
E(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\
0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\
0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\
2a^2 + 3b^2 &= 11 \\
2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11 \\
4.5b^2 - 3b + 0.5 + 3b^2 &= 11 \\
7.5b^2 - 3b - 10.5 &= 0 \\
b_1 &= -1
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\
\mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\
0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\
0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\
2a^2 + 3b^2 &= 11 \\
2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11 \\
4.5b^2 - 3b + 0.5 + 3b^2 &= 11 \\
7.5b^2 - 3b - 10.5 &= 0 \\
b_1 &= -1 \\
b_2 &= 1.4
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\
\mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\
0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\
0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\
2a^2 + 3b^2 &= 11 \\
2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11 \\
4.5b^2 - 3b + 0.5 + 3b^2 &= 11 \\
7.5b^2 - 3b - 10.5 &= 0 \\
b_1 &= -1 \\
b_2 &= 1.4
\end{aligned}$$

$a_1 = 0.5 - 1.5b_1 = 2$

- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\
\mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\
0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\
0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\
2a^2 + 3b^2 &= 11 \\
2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11 \\
4.5b^2 - 3b + 0.5 + 3b^2 &= 11 \\
7.5b^2 - 3b - 10.5 &= 0 \\
b_1 &= -1 \\
b_2 &= 1.4
\end{aligned}$$

$$a_1 = 0.5 - 1.5b_1 = 2$$
$$a_2 = 0.5 - 1.5b_2 = -1.6$$

Aufgabe 7.11

In einem Geldspielautomat laufen unabhängig voneinander drei Walzen. Auf jeder Walze sind folgende Symbole aufgedruckt: $1 \times \bigstar$, $2 \times \spadesuit$ und $3 \times \blacktriangle$. Stehen nach dem zufälligen Anhalten der Walzen drei gleiche Symbole in einer Reihe, so erhält der Spieler einen Gewinn ausbezahlt:

$\bigstar$	$\bigstar$	$\bigstar$	Fr.	20.—
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\spadesuit$	Fr.	2.—
$\blacktriangle$	$\blacktriangle$	$\blacktriangle$	Fr.	1.—

In allen anderen Fällen geht er leer aus.

(a) Stelle die Verteilung des Gewinns X tabellarisch dar.

(b) Bei welchem Einsatz ist das Spiel fair?

Aufgabe 7.11

(a) X: Gewinn in CHF

$X = x_i$	$p_i = P(X = x_i)$
20	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$
2	$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{216}$
1	$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{27}{216}$

Aufgabe 7.11

(a) X: Gewinn in CHF

$X = x_i$	$p_i = P(X = x_i)$
20	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$
2	$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{216}$
1	$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{27}{216}$

(b) $E(X) = \frac{1}{216} \cdot 20 + \frac{8}{216} \cdot 2 + \frac{27}{216} \cdot 1 = \frac{7}{24}$

Das Spiel ist bei einem Einsatz von 0.2917 Franken fair.

Aufgabe 7.12

Gegeben: Zufallsvariable X mit

x	-2	1	2	4
$p_X(x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

Gesucht: Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X, $Y = 2X + 1$ und $Z = X^2$.

Aufgabe 7.12

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

Aufgabe 7.12

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \\
&= 0.2 \cdot (-2 - 1.7)^2 + 0.1 \cdot (1 - 1.7)^2 + \ldots \\
&= 4.41
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.12

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \\ &= 0.2 \cdot (-2 - 1.7)^2 + 0.1 \cdot (1 - 1.7)^2 + \ldots \\ &= 4.41\end{aligned}$$

Alternative: mit

Aufgabe 7.12

(a) $\mathsf{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\big(x - \mathsf{E}(X)\big)^2 \\ &= 0.2 \cdot (-2 - 1.7)^2 + 0.1 \cdot (1 - 1.7)^2 + \dots \\ &= 4.41\end{aligned}$$

Alternative: mit

$\mathsf{E}(X^2) = 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 4 + 0.3 \cdot 16 = 7.3$

Aufgabe 7.12

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \\ &= 0.2 \cdot (-2 - 1.7)^2 + 0.1 \cdot (1 - 1.7)^2 + \ldots \\ &= 4.41\end{aligned}$$

Alternative: mit

$\mathrm{E}(X^2) = 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 4 + 0.3 \cdot 16 = 7.3$

erhält man:

Aufgabe 7.12

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \\ &= 0.2 \cdot (-2 - 1.7)^2 + 0.1 \cdot (1 - 1.7)^2 + \dots \\ &= 4.41\end{aligned}$$

Alternative: mit

$\mathrm{E}(X^2) = 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 4 + 0.3 \cdot 16 = 7.3$

erhält man:

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 7.3 - 1.7^2 = 4.41$

Aufgabe 7.12

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \\ &= 0.2 \cdot (-2 - 1.7)^2 + 0.1 \cdot (1 - 1.7)^2 + \ldots \\ &= 4.41\end{aligned}$$

Alternative: mit

$\mathrm{E}(X^2) = 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 4 + 0.3 \cdot 16 = 7.3$

erhält man:

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 7.3 - 1.7^2 = 4.41$

und damit $\sigma(X) = 2.1$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1) = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1) = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$

Ebenso bei der Varianz: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1) = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$$

Ebenso bei der Varianz: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 1) = 2^2\mathrm{Var}(X) = 4 \cdot 4.41 = 17.64$$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1) = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$$

Ebenso bei der Varianz: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 1) = 2^2\mathrm{Var}(X) = 4 \cdot 4.41 = 17.64$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2^2\mathrm{Var}(X)} = 2 \cdot 2.1 = 4.2$$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$E(Y) = E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$

Ebenso bei der Varianz: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 1) = 2^2\mathrm{Var}(X) = 4 \cdot 4.41 = 17.64$

$\sigma(X) = \sqrt{2^2\mathrm{Var}(X)} = 2 \cdot 2.1 = 4.2$

(c) $E(Z) = 7.3$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1) = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$

Ebenso bei der Varianz: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 1) = 2^2\mathrm{Var}(X) = 4 \cdot 4.41 = 17.64$

$\sigma(X) = \sqrt{2^2\mathrm{Var}(X)} = 2 \cdot 2.1 = 4.2$

(c) $\mathrm{E}(Z) = 7.3$

$\mathrm{Var}(Z) = \cdots = 33.21;$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1) = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$

Ebenso bei der Varianz: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 1) = 2^2\mathrm{Var}(X) = 4 \cdot 4.41 = 17.64$

$\sigma(X) = \sqrt{2^2\mathrm{Var}(X)} = 2 \cdot 2.1 = 4.2$

(c) $\mathrm{E}(Z) = 7.3$

$\mathrm{Var}(Z) = \cdots = 33.21;$

$\sigma(Z) = \cdots = 5.763$

Aufgabe 7.13

Wie oft muss man einen fairen Spielwürfel durchschnittlich werfen, bis man zum ersten Mal die Augenzahl 6 erhält.

Aufgabe 7.13

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \quad \text{Indexverschiebung: } k \to k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p(1-p)^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{k} \\
&= 0 \cdot p(1-p)^0 + \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \\
&= (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} + 1 = (1-p)\mathrm{E}(X) + 1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7.13

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \quad \text{Indexverschiebung: } k \to k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p(1-p)^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{k} \\
&= 0 \cdot p(1-p)^{0} + \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \\
&= (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} + 1 = (1-p)\mathrm{E}(X) + 1
\end{aligned}$$

Auflösen nach $\mathrm{E}(X)$ ergibt $\mathrm{E}(X) = 1/p$

Also: $\mathrm{E}(X) = 1/p = 1/(1/6) = 6$

Aufgabe 7.14

Ein Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p wird n-Mal durchgeführt. Berechne n und p, wenn $\mathrm{E}(X) = 8$ und $\mathrm{Var}(X) = 6$ bekannt sind.

Aufgabe 7.14

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= np &&= 8 \\ \mathrm{Var}(X) &= np(1-p) &&= 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.14

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= np &&= 8 \\ \mathrm{Var}(X) &= np(1-p) &&= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8(1-p) &= 6 \\ (1-p) &= 3/4 \\ p &= 1/4 \\ n &= 32 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.15

In einem Netzwerkrouter kommen im Mittel pro Minute 10 Datenpakete an. Bestimme $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$ dieser poissonverteilten Zufallsvariable.

Aufgabe 7.15

$\mathrm{E}(X) = \lambda = 10$ Pakete/Minute

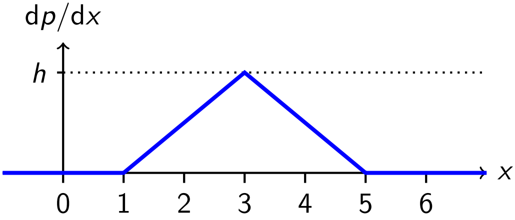
Aufgabe 7.15

$\mathrm{E}(X) = \lambda = 10$ Pakete/Minute

$\mathrm{Var}(X) = \lambda = 10$ Pakete/Minute

Aufgabe 8.1

Gegeben ist der unten skizzierte Graph einer Funktion f, die auf dem restlichen, nicht sichtbaren Definitionsbereich, überall den Wert Null hat.



(a) Wie gross muss h gewählt werden, damit f eine Dichtefunktion ist?

(b) Berechne $P(4 \leq X \leq 5)$ für die stetige Zufallsvariable X, die zu f gehört.

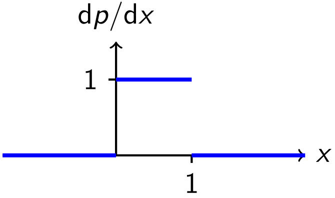
Aufgabe 8.1

(a) Für $h = 0.5$ hat die Fläche unter dem Graphen den Inhalt 1.

(b) $P(4 \leq X \leq 5) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 8.2

Berechne den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ der stetigen Zufallsgrösse X, die zur folgenden Dichtefunktion gehört.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 8.2

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \int_0^1 x \cdot 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

($*$) Da die Dichtefunktion ausserhalb des Intervalls $[0, 1]$ überall den Wert Null hat, können wir uns bei der Integration auf diesen Bereich beschränken.

Aufgabe 8.3

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1) & \text{falls } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

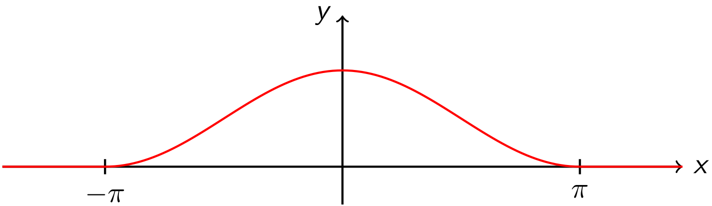
(a) Skizziere die Funktion f für $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

(b) Zeige, dass es sich um eine *Wahrscheinlichkeitsdichte* handelt.

(c) Berechne $P(X \leq 1)$.

Aufgabe 8.3

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}(\cos x + 1) & \text{falls } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Aufgabe 8.3

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 8.3

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 8.3

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 8.3

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\sin x + x\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

Aufgabe 8.3

(b)
$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\sin x + x\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\big[(0+\pi) - (0-\pi)\big]
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.3

(b)
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\sin x + x\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[(0+\pi) - (0-\pi)\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.3

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\sin x + x\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\big[(0+\pi) - (0-\pi)\big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi$$

$$= 1$$

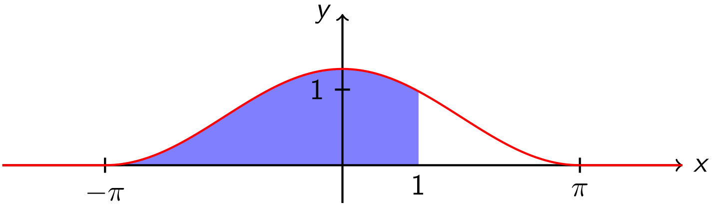
Aufgabe 8.3

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\sin x + x\Big]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Big[(0+\pi) - (0-\pi)\Big]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi$$
$$= 1$$

Also ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

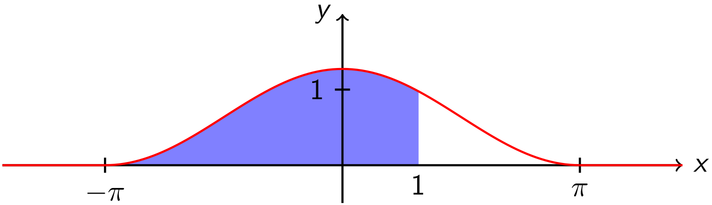
Aufgabe 8.3

(c) Graph:



Aufgabe 8.3

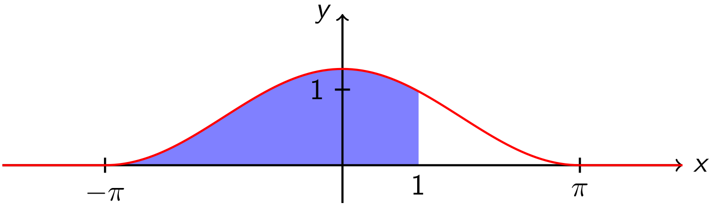
(c) Graph:



$P(X \leq 1) =$

Aufgabe 8.3

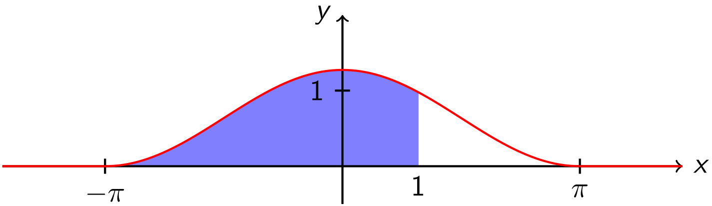
(c) Graph:



$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Aufgabe 8.3

(c) Graph:

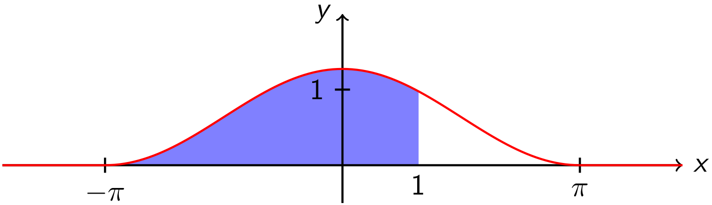


$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\stackrel{(b)}{=}$$

Aufgabe 8.3

(c) Graph:



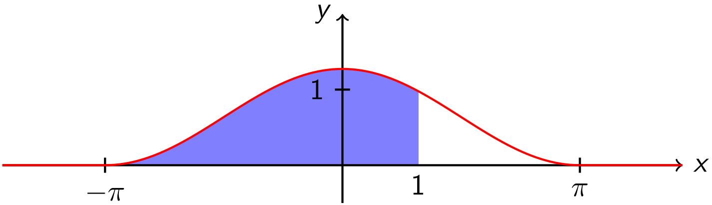
$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{(b)}{=} \frac{1}{2\pi}\Big[\sin x + x\Big]_{-\pi}^{1}$$

$$=$$

Aufgabe 8.3

(c) Graph:



$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{(b)}{=} \frac{1}{2\pi}\Big[\sin x + x\Big]_{-\pi}^{1}$$

$$= 0.7931$$

Aufgabe 8.4

Eine Maschine produziert Schrauben mit einer mittleren Länge von $\mu = 80$ mm und einer Standardabweichung von $\sigma = 2$ mm.

(a) Wie gross ist der Prozentsatz aller produzierten Schrauben, die länger sind als 78 mm?

(b) Wie gross ist der Prozentsatz der Schrauben, deren Längen zwischen 78 und 82 mm liegen?

(c) Nach längerer Laufleistung steigt die Standardabweichung auf $\sigma = 4$ mm Welcher Prozentsatz der Schrauben liegt nun innerhalb des Toleranzbereichs von 78 mm bis 82 mm?

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78)$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x) \mathrm{d}x$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

(b) $P(78 \leq X \leq 82)$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

(b) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

(b) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.6827$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

(b) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.6827$

(c) $P(78 \leq X \leq 82)$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

(b) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.6827$

(c) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,4}(x)\mathrm{d}x$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

(b) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.6827$

(c) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,4}(x)\mathrm{d}x = 0.3829$

Aufgabe 8.5

Ein Intelligenztest liefert im Bevölkerungsdurchschnitt einen Mittelwert von $\mu = 120$ Punkten bei einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ Punkten.

(a) Eine zufällig ausgewählte Person wird getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht sie 100 oder weniger Punkte?

(b) 20 Personen werden getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht davon mindestens eine Person 130 oder mehr Punkte?

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) =$$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x =$$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x) \mathrm{d}x = 0.0228$$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $P(X \geq 130) =$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $P(X \geq 130) = \int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x =$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $P(X \geq 130) = \int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.1587$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $P(X \geq 130) = \int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.1587$

Y: Anzahl Personen mit mehr als 130 Punkten
(binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0.1587$)

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $P(X \geq 130) = \int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.1587$

Y: Anzahl Personen mit mehr als 130 Punkten
(binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0.1587$)

$$P(Y \geq 1) =$$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $$P(X \geq 130) = \int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.1587$$

Y: Anzahl Personen mit mehr als 130 Punkten
(binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0.1587$)

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $$P(X \geq 130) = \int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.1587$$

Y: Anzahl Personen mit mehr als 130 Punkten
(binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0.1587$)

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^{20} =$$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $$P(X \geq 130) = \int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.1587$$

Y: Anzahl Personen mit mehr als 130 Punkten
(binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0.1587$)

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^{20} = 0.9684$$

Aufgabe 8.6

Die mittlere Windgeschwindigkeit an der westlichen Ostsee beträgt 18 km/h. Die Standardabweichung beträgt 6 km/h. Zur Vorbereitung von Segelregatten werden Messungen vorgenommen bzw. Wahrscheinlichkeiten berechnet.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer Messung eine Windgeschwindigkeit über 25 km/h gemessen?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass beim Start der Regatta der Wind mit einer Geschwindigkeit von über 15 km/h bläst?

(c) Es werden fünf zufällige Messungen vorgenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen alle Messwerte über 15 km/h?

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Windgeschwindigkeit bei mindestens drei der zehn geplanten Regatten über 15 km/h liegen?

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) =$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x =$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) =$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x) \mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x) \mathrm{d}x =$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x) \mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x) \mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \displaystyle\int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \displaystyle\int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

$P_5(Y = 5) =$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x) \mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x) \mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

$P_5(Y = 5) = p^5 =$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \displaystyle\int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \displaystyle\int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

$P_5(Y = 5) = p^5 = 0.1581$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

$P_5(Y = 5) = p^5 = 0.1581$

(d) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0.6915$ aus (c)

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

$$P_5(Y = 5) = p^5 = 0.1581$$

(d) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0.6915$ aus (c)

$$P_{10}(Y \geq 3) = 1 - P_{10}(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{10-k} =$$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

$P_5(Y = 5) = p^5 = 0.1581$

(d) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0.6915$ aus (c)

$$P_{10}(Y \geq 3) = 1 - P_{10}(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{10-k} = 0.$$

TR: $1 - \text{binomcdf}(10{,}0.6915{,}2)$

Aufgabe 9.1

Eine Brauerei produziert ein neues alkoholfreies Bier. In einem Geschmackstest erhalten 150 Personen je ein Glas alkoholfreies bzw. gewöhnliches Bier, und sie sollen versuchen, das alkoholfreie Bier zu identifizieren.

Das gelingt 98 Personen. Testen Sie anhand dieser Daten die Hypothese, alkoholfreies und gewöhnliches Bier seien geschmacklich nicht zu unterscheiden.

Caputo, A. et al. (2008). *Arbeitsbuch Statstik*. Berlin: Springer.

Aufgabe 9.1

$p = P(\text{eine Person kann das alkoholfreie Bier identifizieren})$

Aufgabe 9.1

$p = P(\text{eine Person kann das alkoholfreie Bier identifizieren})$

$p_0 = 0.5$

Aufgabe 9.1

$p = P(\text{eine Person kann das alkoholfreie Bier identifizieren})$

$p_0 = 0.5$

H_0: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich nicht indentifiziert werden. $(p = p_0)$

Aufgabe 9.1

$p = P(\text{eine Person kann das alkoholfreie Bier identifizieren})$

$p_0 = 0.5$

H_0: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich nicht indentifiziert werden. ($p = p_0$)

H_1: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich identifiziert werden. ($p > p_0$)

$x = 98, \ n = 150$

Aufgabe 9.1

$p = P(\text{eine Person kann das alkoholfreie Bier identifizieren})$

$p_0 = 0.5$

H_0: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich nicht indentifiziert werden. ($p = p_0$)

H_1: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich identifiziert werden. ($p > p_0$)

$x = 98, \ n = 150$

$z = 3.7559$

Aufgabe 9.1

$p = P(\text{eine Person kann das alkoholfreie Bier identifizieren})$

$p_0 = 0.5$

H_0: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich nicht indentifiziert werden. ($p = p_0$)

H_1: Das alkoholfreie Bier kann geschmacklich identifiziert werden. ($p > p_0$)

$x = 98,\ n = 150$

$z = 3.7559$

p-Wert $= 0.8639 \cdot 10^{-5}$

Entscheidung: H_0 verwerfen

Der Anteil der Personen, die das alkoholfreie Bier geschmacklich indentifizieren können ist signifikant höher als 0.5.

Aufgabe 9.2

Auf die Frage, ob sie recyklierte Kleider (nach dem Cradle to Cradle-Konzept) tragen würden, antworteten die befragten Schülerinnen und Schüler:

	Ja	Nein	Total
Frauen	35	28	63
Männer	30	16	46

Ist der Anteil der Schülerinnen, die recyklierte Kleider tragen würden, signifikant kleiner als derjenige der Schüler?

aus einer Maturaarbeit 2013/2014, Kollegium St. Fidelis

Aufgabe 9.2

H_0: Die Anteile der Schülerinnen und Schüler, die rezyklierte Kleider tragen würden, unterscheiden sich nicht. ($p_1 = p_2$)

Aufgabe 9.2

H_0: Die Anteile der Schülerinnen und Schüler, die rezyklierte Kleider tragen würden, unterscheiden sich nicht. $(p_1 = p_2)$

H_1: Der Anteil der Schülerinnen, die rezyklierte Kleider tragen würden, ist kleiner als der entsprechende Anteil der Schüler. $(p_1 < p_2)$

$x_1 = 35$, $n_1 = 63$

$x_2 = 30$, $n_2 = 46$

$z = -1.015$

p-Wert $= 0.1550$

Entscheidung: H_0 beibehalten

Der Anteil der Schülerinnen, die rezyklierte Kleider tragen würden, ist nicht signifikant kleiner als der entsprechende Anteil bei den Schülern.

Aufgabe 9.3

Anzahl Verkehrsunfälle im Kanton Schaffhausen nach Wochentag im Jahr 2011:

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Anzahl	80	99	78	89	82	79	53

Testen Sie die Hypothese, dass Verkehrsunfälle im Kanton Schaffhausen im Mittel an allen Wochentagen gleich häufig auftreten.

Schaffhauser Polizei. (2013). *Verkehrsunfall Statistik des Kantons Schaffhausen 2012*.

Aufgabe 9.3

H_0 Die Anzahl der Verkehrsunfälle im Kanton Schaffhausen ist gleichmässig auf die Wochentage verteilt.

H_1 Es gibt Wochentage, an denen Verkehrsunfälle im Kanton Schaffhausen häufiger bzw. seltener auftreten als an anderen.

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
beobachtet	80	99	78	89	82	79	53
erwartet	80	80	80	80	80	80	80

$\alpha = 0.05$

$\mathrm{df} = 6$

$\chi^2 = 14.75$

$p = 0.02229$

Entscheidung: H_0 verwerfen

Aufgabe 9.4

In einer empirischen Studie zum Rauchverhalten wurden 10 Raucher befragt, wie viele Zigaretten sie durchschnittlich pro Tag rauchen. Es wurden folgende Angaben gemacht:

25	34	5	20	50	44	18	39	29	19

Überprüfen Sie die Hypothese, dass der Median der Anzahl gerauchter Zigaretten grösser als 25 ist.

Caputo, A. et al. (2008). *Arbeitsbuch Statstik*. Berlin: Springer.

Aufgabe 9.4

Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

$\tilde{x}$: unbekannter Median der Grundgesamtheit

$\tilde{x}_0 = 25$

- H_0: $\tilde{x} = 25$
- H_1: $\tilde{x} > 25$

$\tilde{x}_0$	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
x_i	25	34	5	20	50	44	18	39	29	19
$\text{sig}(x_i - \tilde{x}_0)$		$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\lvert x_i - \tilde{x}_0 \rvert$		9	20	5	25	19	7	14	4	6
Rang		5	8	2	9	7	4	6	1	3

Rangsumme $r_+ = 5 + 9 + 7 + 6 + 1 = 29$

Rangsumme $r_- = 8 + 2 + 4 + 3 = 17$

Kontrolle: $9(9+1)/2 = 45$ (ok)

$r_{0.05}(n) = 8$ und $n(n+1)/2 - r_{0.05(n)} = 45 - 8 = 37$ [Tabelle]

Verwerfungsbereich: $V = \{0, \ldots, 8, 37, \ldots, 45\}$

$r_+ \notin V$ (und damit auch $r_- \notin V$)

Entscheidung: H_0 beibehalten

Die mittlere Anzahl gerauchter Zigaretten ist nicht signifkant höher als 25.

Aufgabe 9.5

Ein Jugendamt führt eine Untersuchung zur Situation von Pflegekindern durch. Dabei interessiert vor allem, ob das Pflegekind in einer Familie mit weiteren Kindern im Mittel besser integriert ist als bei Pflegeeltern ohne eigene Kinder.

Mittels eines Fragebogens wird eine Integrationspunktzahl ermittelt, die umso höhere Werte annimmt, je besser das Pflegekind in die Familie integriert wird.

Pflegeeltern ...	Punktzahl							
mit eigenen Kindern	8	13	16	20	24	17	18	25
ohne eigene Kinder	12	9	13	11	19	15		

Caputo, A. et al. (2008). *Arbeitsbuch Statstik*. Berlin: Springer.

Aufgabe 9.5

Hypothesen:

H_1 Die Integration ist bei Pflegeeltern mit eigenen Kindern besser als bei Pflegeeltern ohne Kinder.

Aufgabe 9.5

Hypothesen:

- H_1 Die Integration ist bei Pflegeeltern mit eigenen Kindern besser als bei Pflegeeltern ohne Kinder.
- H_0 Die Integration ist bei Pflegeeltern mit eigenen Kindern gleich gut wie bei Pflegeeltern ohne Kinder.

H_0 beibehalten, da $6.05\% > 5\%$.

H_0 beibehalten, da $6.05\% > 5\%$.

H_0: Die Integration ist bei Pflegeeltern mit eigenen Kindern gleich gut wie bei Pflegeeltern ohne Kinder. ($\alpha = 5\%$)

Aufgabe 9.6

Es wird vermutet, dass der Hautwiderstand nachts absinkt.

In einem Experiment wurde bei fünf Personen der Hautwiderstand jeweils einmal bei Tag und einmal bei Nacht gemessen.

Person Nr.	1	2	3	4	5
bei Tag [kΩ]	24	28	21	27	23
bei Nacht [kΩ]	20	25	15	22	18

Lässt sich die Vermutung durch die vorliegende Untersuchung erhärten?

Caputo, A. et al. (2008). *Arbeitsbuch Statstik*. Berlin: Springer.

Aufgabe 9.6

Wilcoxon-Rangsummentest:

$\tilde{x}$ Hautwiderstand bei Tag

$\tilde{y}$ Hautwiderstand bei Nacht

- H_0: $\tilde{x} = \tilde{y}$
- H_1: $\tilde{y} > \tilde{y}$

x_i	Rang	y_i	Rang
24	7	20	3
28	10	25	8
21	4	15	1
27	9	22	5
23	6	18	2
r_x:	36	r_y	19

Kontrolle $10 \cdot (10-1)/2 = 45$ (ok)

untere Grenze: $n_1(n_1+1)/2 + w_{0.05}(n_1, n_2) = 5(5+1)/2 + 4 = 19$

obere Grenze:

$n_1 n_2 + n_1(n_1+1)/2 - w_{0.05}(n_1, n_2) = 25 + 5(5+1)/2 - 4 = 36$

Verwerfungsbereich: $V = \{0, \ldots, 19, 36, \ldots, 45\}$

$r_x \in V$ (und damit auch $r_y \in V$)

Entscheidung: H_0 verwerfen

Der Hautwiderstand sinkt nachts ab. ($\alpha = 5\%$)

Aufgabe 9.7

Um die Qualität eines neuen Messgeräts für Flüssigkeiten zu beurteilen, wurde damit neunmal ein Volumen von 10 ml Wasser abgemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte:

10.77	9.98	9.92	10.66	10.30	10.36	10.44	10.31	9.91

Testen Sie die Hypothese, dass das neue Messgerät ein mittleres Flüssigkeitsvolumen von 10 ml misst.

Aufgabe 9.7

μ: unbekannter Mittelwert des neuen Messgeräts

$\mu_0 = 10\,\text{ml}$

H_0 Das neue Messgerät misst im Mittel ein Flüssigkeitsvolumen von 10 ml. ($\mu = \mu_0$)

Aufgabe 9.7

μ: unbekannter Mittelwert des neuen Messgeräts

$\mu_0 = 10\,\text{ml}$

- H_0 Das neue Messgerät misst im Mittel ein Flüssigkeitsvolumen von 10 ml. ($\mu = \mu_0$)
- H_1 Das neue Messgerät misst im Mittel ein anderes Flüssigkeitsvolumen als 10 ml. ($\mu \neq \mu_0$)

$\{10.77, 9.98, 9.92, 10.66, 10.30, 10.36, 10.44, 10.31, 9.91\} \rightarrow L_1$

$t = 2.843$

$p = 0.02172$

Entscheidung: H_0 verwerfen

Die vom neuen Messgerät gemessene Flüssigkeitsmenge unterscheidet sich signifikant von 10 `ml`.

Aufgabe 9.8

Eine Schülervertreterin hegt den Verdacht, dass die Pausenbrötchen, die sie abwechslungsweise von zwei Bäckereien beziehen und zum gleichen Preis einkaufen, unterschiedliche mittlere Gewichte haben.

Zur Kontrolle werden jeweils 5 Brötchen aus den Lieferungen zufällig ausgewählt und auf einer Briefwaage gewogen.

Brötchen von Bäckerei A (g)	34	32	40	32	34
Brötchen von Bäckerei B (g)	42	43	41	37	33

Lässt sich der Verdacht statistisch belegen?

Aufgabe 9.8

μ_A: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei A

μ_B: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei B

Aufgabe 9.8

μ_A: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei A

μ_B: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei B

H_0 Die mittleren Gewichte der Brötchen der beiden Bäckereien unterscheiden sich nicht. $(\mu_A = \mu_B)$

Aufgabe 9.8

μ_A: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei A

μ_B: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei B

- H_0 Die mittleren Gewichte der Brötchen der beiden Bäckereien unterscheiden sich nicht. ($\mu_A = \mu_B$)
- H_1 Die mittleren Gewichte der Brötchen der beiden Bäckereien unterscheiden sich. ($\mu_A \neq \mu_B$)

Bäckerei A: $\{34, 32, 40, 32, 34\} \to \mathtt{L}_1$

Bäckerei B: $\{42, 43, 41, 37, 33\} \to \mathtt{L}_2$

Für die Berechnung des Standardfehlers des Mittelwertunterschieds sollte man sicherheitshalber annehmen, dass die Varianzen der beiden Stichproben verschieden sind und in die Berechnung des p-Werts einfliessen (Korrektur von Welch). In diesem Fall sollte man beim TI-84 Plus die Option `pooled`=No wählen.

Kann man annehmen, dass die Varianzen in beiden Stichproben identisch sind, führt auch die Option `pooled`=Yes zum gleichen Ergebnis.

Aufgabe 9.8

μ_A: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei A

μ_B: mittleres Gewicht der Brötchen von Bächerei B

- H_0 Die mittleren Gewichte der Brötchen der beiden Bäckereien unterscheiden sich nicht. ($\mu_A = \mu_B$)
- H_1 Die mittleren Gewichte der Brötchen der beiden Bäckereien unterscheiden sich. ($\mu_A \neq \mu_B$)

Bäckerei A: $\{34, 32, 40, 32, 34\} \to \mathtt{L}_1$

Bäckerei B: $\{42, 43, 41, 37, 33\} \to \mathtt{L}_2$

Für die Berechnung des Standardfehlers des Mittelwertunterschieds sollte man sicherheitshalber annehmen, dass die Varianzen der beiden Stichproben verschieden sind und in die Berechnung des p-Werts einfliessen (Korrektur von Welch). In diesem Fall sollte man beim TI-84 Plus die Option `pooled`=No wählen.

Kann man annehmen, dass die Varianzen in beiden Stichproben identisch sind, führt auch die Option `pooled`=Yes zum gleichen Ergebnis.

Aufgabe 9.9

Es soll untersucht werden, ob durch die Einnahme eines Medikaments die Konzentrationsfähigkeit gesteigert werden kann. Hierzu wird in einem ersten Test die Konzentrationsleistung von fünf Personen bestimmt. Dann wird den fünf Personen das Medikament verabreicht und die Konzentrationsleistung mit einem äquivalenten Test erneut gemessen. Es ergeben sich folgende Messwerte:

Person Nr.	1	2	3	4	5
ohne Medikament	108	99	100	100	98
mit Medikament	107	100	100	102	101

Bortz, J., Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. Berlin: Springer.

Aufgabe 9.9

t-Test für gepaarte Stichproben

H_0 Das Medikament hat keinen systematischen Einfluss auf die Konzentrationsleistung ($\mu_2 - \mu_1 = 0$)

Aufgabe 9.9

t-Test für gepaarte Stichproben

- H_0 Das Medikament hat keinen systematischen Einfluss auf die Konzentrationsleistung ($\mu_2 - \mu_1 = 0$)
- H_1 Das Medikament verbessert systematisch die Konzentrationsleistung. ($\mu_2 - \mu_1 > 0$)

$\{108, 99, 100, 100, 98\} \rightarrow \mathrm{L}_1$

$\{107, 100, 100, 102, 101\} \rightarrow \mathrm{L}_2$

$\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \rightarrow \mathrm{L}_3$

$t = 1.414$

$p = 0.1151$

Entscheidung: H_0 beibehalten

Das Medikament hat keinen signifikanten Einfluss auf die Konzentrationsleistung.