Stochastik (Normalverteilung) **Lösungen+** **Übungen**

Aufgabe 1

(a) $P(X \leq 245) = \int_{-\infty}^{245} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = 0.434$

(b) $P(X \geq 259) = \int_{259}^{\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = 0.382$

oder: $P(X \geq 259) = 1 - \int_{-\infty}^{259} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = 0.382$

(c) $P(249 \leq X \leq 253) = \int_{249}^{253} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = 0.0531$

(d) $P(|X - 248| \geq 10) = P(X < 238) + P(X > 258) = 1 - \int_{238}^{258} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = 0.739$

Aufgabe 2

$P(65 < X < 70) = \int_{65}^{70} \varphi_{66,5}(x)\,\mathrm{d}x = 0.367$

$800 \cdot 0.367 \approx 294$ Schüler

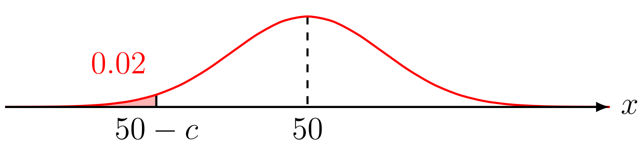
Aufgabe 3

$P(X \leq 50 - c) + P(X \geq 50 + c) \leq 0.04$

Da die Dichtefunktion der Normalverteilung symmetrisch zur Geraden $y = \mu$ ist, gilt:

$P(X \leq 50 - c) \leq 0.02$ bzw.

$\int_{-\infty}^{50-c} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = \Phi_{\mu,\sigma}(50 - c) \leq 0.02$



Der Taschenrechner kann die inverse Summennormalverteilungsfunktion berechnen:

$50 - c = \Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(0.02) = 46.92 \quad \Rightarrow \quad c = 3.08\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 4

Für welches σ gilt $P(X \leq 1000) = 0.01$?

Zunächst transformieren wir die $(1002, \sigma)$-normalverteilte Zufallsgrösse X mit

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

in die $(0, 1)$-normalverteilte Zufallsgrösse Z (*Standardnormalverteilung*):

$$P\left(\frac{X - 1002}{\sigma} \leq \frac{1000 - 1002}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{1000 - 1002}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{-2}{\sigma}\right) = 0.01$$

Da bei Z die Parameter $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ bekannt sind, können wir mit der inversen Summennormalverteilungsfunktion den Wert von $-2/\sigma$ und damit auch σ berechnen:

$$\frac{-2}{\sigma} = \Phi_{0,1}^{-1}(0.01) = -2.326 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0.8597$$

Kontrolle: $P(X \leq 1000) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1000} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\, \mathrm{d}x \approx 0.01$