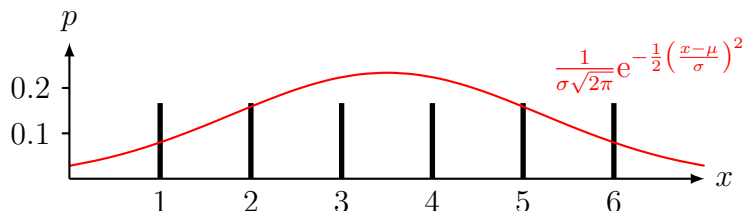


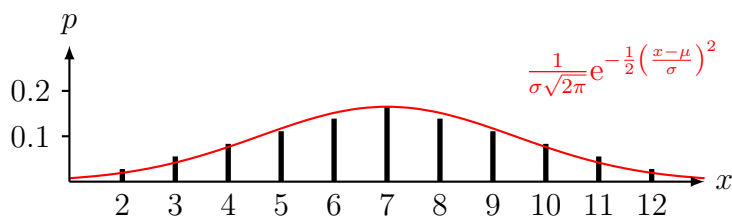
Die Normalverteilung ist eine *stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung*. Genauer gesagt: eine *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Wir erhalten z. B. näherungsweise eine Normalverteilung, wenn wir immer grössere Summen einer unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen X bilden.

Augenzahl beim Wurf eines fairen Spielwürfels



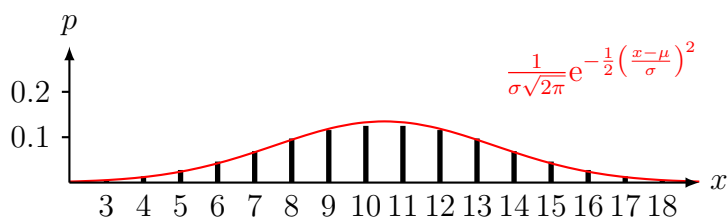
$$\mu = E(X) = 3.5 \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1.708$$

Summe der Augenzahlen von zwei fairen Spielwürfeln



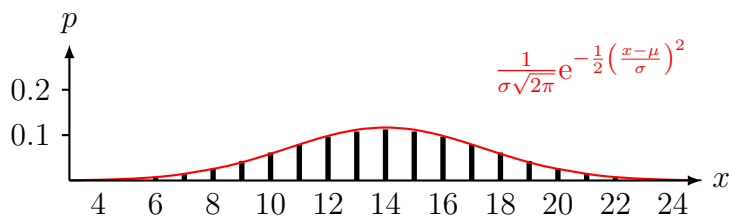
$$\mu = E(X) = 7 \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = 2.415$$

Summe der Augenzahlen von drei fairen Spielwürfeln



$$\mu = E(X) = 10.5 \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = 2.958$$

Summe der Augenzahlen von vier fairen Spielwürfeln



$$\mu = E(X) = 14 \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = 3.416$$

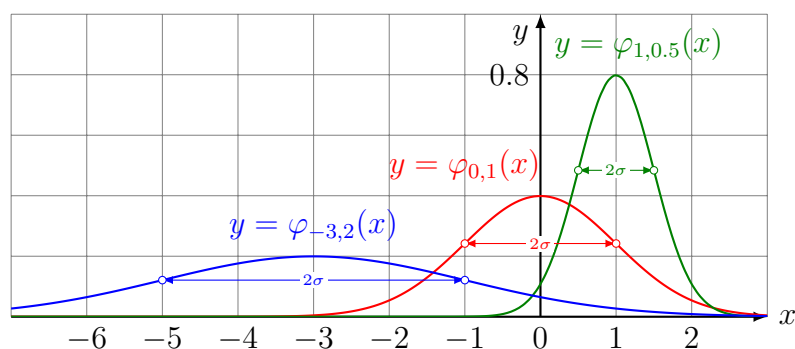
Die Dichtefunktion der Normalverteilung

Bei vielen Verteilungen kann diese „Glockenform“ durch eine anpassbare Funktion ersetzt werden. Dies ist die Funktion

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

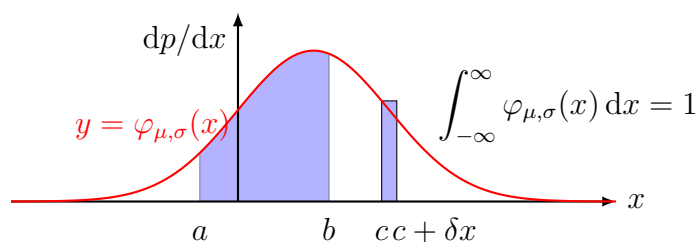
Da diese Funktion für beliebige reelle Werte von x definiert ist, handelt es sich um die Verteilung einer stetigen Zufallsgrösse. Die Parameter μ und $\sigma > 0$ sind der Erwartungswert bzw. die Standardabweichung dieser Zufallsgrösse. An der Stelle $x = \mu$ liegt der Hochpunkt der Kurve und bei $x = \mu \pm \sigma$ liegen die beiden Wendepunkte. Je grösser σ ist, desto breiter und flacher ist die Kurve.

Die Normalverteilung für einige Parameterwerte



Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Funktionswerte von $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ sind *Wahrscheinlichkeitsdichten*, die erst durch Integration zu Wahrscheinlichkeiten werden. Wahrscheinlichkeitsdichten sind nichtnegativ und die Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse muss den Inhalt 1 haben. *Achtung:* Wahrscheinlichkeitsdichten können Werte grösser als 1 haben.



$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx$$

$$P(c < X < c + \delta x) \approx \varphi_{\mu,\sigma}(c) \cdot \delta x \quad \text{für kleine } \delta x$$

Die Standardnormalverteilung $\varphi_{0,1}(x)$

Die Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ wird *Standardnormalverteilung* genannt.

Die Variablentransformation $x \rightarrow x - \mu$ bewirkt eine horizontale Verschiebung der Kurve $y = \varphi_{0,1}(x)$ und verursacht somit keine Änderung der Fläche zwischen Kurve und x -Achse.

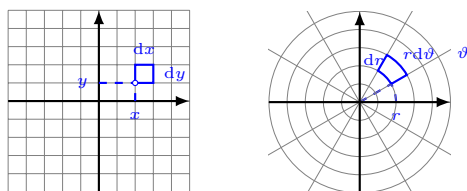
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} dx$$

Die Variablentransformation $(x - \mu) \rightarrow (x - \mu)/\sigma$ bewirkt hingegen eine Multiplikation des Flächeninhalts mit dem Faktor σ . Damit auch $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss die transformierte Funktion noch durch σ dividiert werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Der Normierungsfaktor der Standardnormalverteilung

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx \right) dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) d\vartheta \\ &\stackrel{u=r^2/2}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-u} du \right) d\vartheta = \int_0^{2\pi} 1 d\vartheta = 2\pi \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Die schlechte Nachricht

Abgesehen vom Normierungsfaktor lassen sich Integrale der Form

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

nicht elementar (also mittels einer Stammfunktion) berechnen. Daher transformierte man früher eine Normalverteilung $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ in die Standardnormalverteilung $\varphi_{0,1}(x)$ und berechnete die Wahrscheinlichkeiten anhand tabellierter Werte der Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Heute lassen sich diese Werte jedoch bequem mit einem entsprechenden Taschenrechner oder Computerprogramm ausgeben.