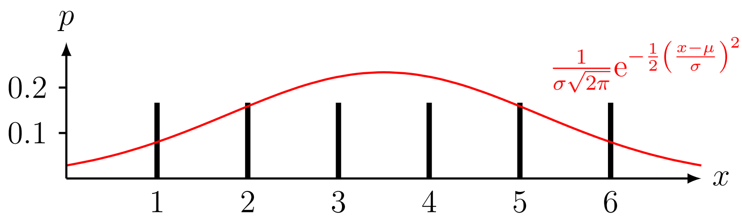
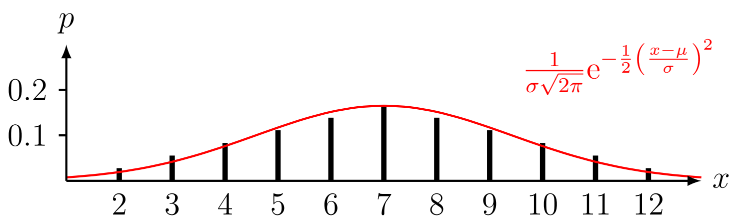
Die Normalverteilung ist eine *stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung*. Genauer gesagt: eine *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Wir erhalten z. B. näherungsweise eine Normalverteilung, wenn wir immer grössere Summen einer unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen X bilden.

Augenzahl beim Wurf eines fairen Spielwürfels



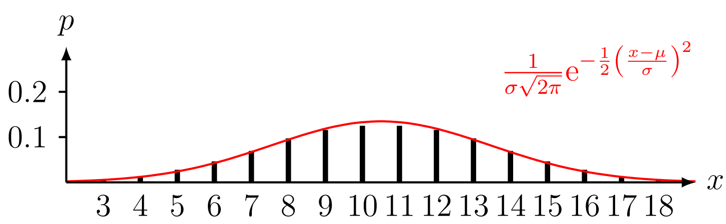
$\mu = \mathrm{E}(X) = 3.5 \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1.708$

Summe der Augenzahlen von zwei fairen Spielwürfeln



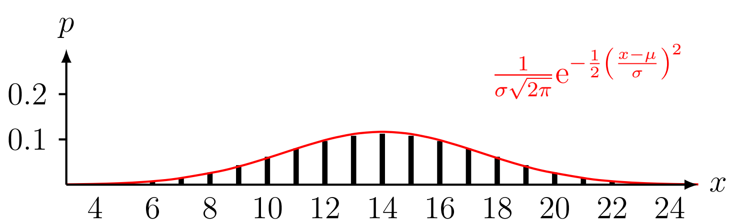
$\mu = \mathrm{E}(X) = 7 \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 2.415$

Summe der Augenzahlen von drei fairen Spielwürfeln



$\mu = \mathrm{E}(X) = 10.5 \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 2.958$

Summe der Augenzahlen von vier fairen Spielwürfeln



$\mu = \mathrm{E}(X) = 14 \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 3.416$

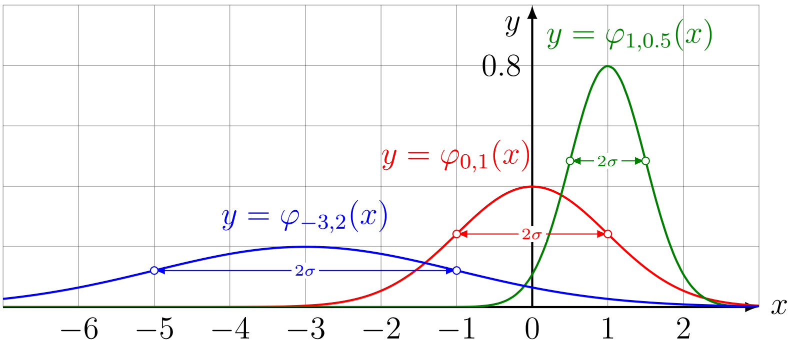
Die Dichtefunktion der Normalverteilung

Bei vielen Verteilungen kann diese „Glockenform“ durch eine anpassbare Funktion ersetzt werden. Dies ist die Funktion

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

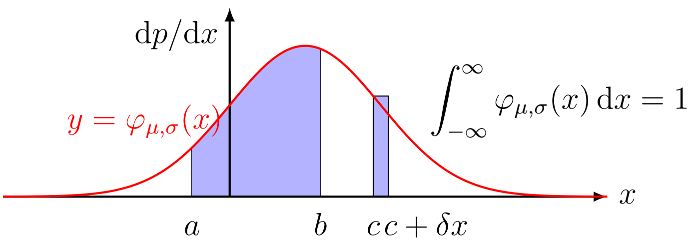
Da diese Funktion für beliebige reelle Werte von x definiert ist, handelt es sich um die Verteilung einer stetigen Zufallsgrösse. Die Parameter μ und $\sigma > 0$ sind der Erwartungswert bzw. die Standardabweichung dieser Zufallsgrösse. An der Stelle $x = \mu$ liegt der Hochpunkt der Kurve und bei $x = \mu \pm \sigma$ liegen die beiden Wendepunkte. Je grösser σ ist, desto breiter und flacher ist die Kurve.

Die Normalverteilung für einige Parameterwerte



Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Funktionswerte von $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ sind *Wahrscheinlichkeitsdichten*, die erst durch Integration zu Wahrscheinlichkeiten werden. Wahrscheinlichhkeitsdichten sind nichtnegativ und die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse muss den Inhalt 1 haben. *Achtung:* Wahrscheinlichkeitsdichten können Werte grösser als 1 haben.



$$P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$P(c < X < c + \delta x) \approx \varphi_{\mu,\sigma}(c) \cdot \delta x \quad \text{für kleine } \delta x$$

Die Standardnormalverteilung $\varphi_{0,1}(x)$

Die Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ wird *Standardnormalverteilung* genannt.

Die Variablentransformation $x \to x - \mu$ bewirkt eine horizontale Verschiebung der Kurve $y = \varphi_{0,1}(x)$ und verursacht somit keine Änderung der Fläche zwischen Kurve und x-Achse.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}\,\mathrm{d}x$$

Die Variablentransformation $(x-\mu) \to (x-\mu)/\sigma$ bewirkt hingegen eine Multiplikation des Flächeninhalts mit dem Faktor σ. Damit auch $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss die transformierte Funktion noch durch σ dividiert werden.

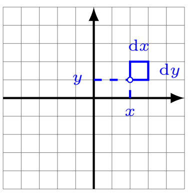
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

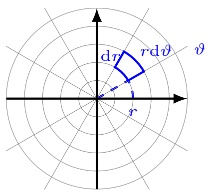
Der Normierungsfaktor der Standardnormalverteilung

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{0}^{2\pi} \left(\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta$$

$$\overset{u=r^2/2}{=} \int_{0}^{2\pi} \left(\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\vartheta = \int_{0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi$$





$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1$$

Die schlechte Nachricht

Abgesehen vom Normierungsfaktor lassen sich Integrale der Form

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

nicht elementar (also mittels eine Stammfunktion) berechnen. Daher transformierte man früher eine Normalverteilung $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ in die Standardnormalverteilung $\varphi_{0,1}(x)$ und Berechnete die Wahrscheinlichkeiten anhand tabellierter Werte der Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Heute lassen sich diese Werte jedoch bequem mit einem entsprechenden Taschenrechenr oder Computerprogramm ausgeben.