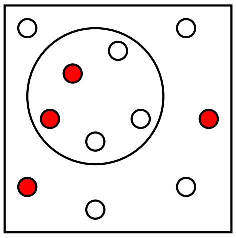
Beispiel

In einer Schachtel liegen gut gemischt 11 Kugeln; 4 davon sind rot, die übrigen weiss. Wir ziehen blind 5 Kugeln aus dieser Schachtel, ohne die gezogenen Kugeln wieder zurückzulegen.



X: Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$P(X = 2) = ?$

Lösung mit wenig Kombinatorik

Wir stellen uns vor, die fünf Kugeln einzeln zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeit für einen möglichen Pfad beträgt:

$$P(rrwww) = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{22}$$

Man überzeuge sich davon, dass jeder andere Pfad aus rr und www die gleiche Wahrscheinlichkeit hat:

$$P(rrwww) = P(rwrww) = \cdots = P(wwwrr) = \frac{1}{22}$$

Nun können die 2 roten (bzw. die 3 weissen) Kugeln auf

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Arten}$$

unter den 5 gezogenen Kugeln auftreten. Damit:

$$P(X = 2) = 10 \cdot \frac{1}{22} = \frac{5}{11}$$

Lösung mit viel Kombinatorik

Idee: Ziehe die fünf Kugeln *gleichzeitig* (Laplace-Formel)

$$p = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$$

Anzahl mögliche Fälle: Auf wie viele Arten kann ich aus einer Menge von 11 Kugeln eine Teilmenge von 5 Kugeln ziehen?

$$\binom{11}{5} = 462$$

Anzahl günstige Fälle: Auf wie viele Arten kann ich aus einer Menge von 4 roten Kugeln eine Teilmenge von 2 roten Kugeln und aus einer Menge von 7 weissen Kugeln eine Teilmenge von 3 weissen Kugeln auswählen?

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3} = 6 \cdot 35 = 210$$

Einsetzen in die Laplace-Formel:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{11}{5}} = \frac{210}{462} = \frac{5}{11}$$

Der Vorteil dieser Lösung: Wir müssen uns nicht mit Produkten der Form

$$\frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7}$$

herumschlagen sondern können mit Binomialkoeffizienten hantieren, die uns der Taschenrechner fast gratis liefert.

Zusammenfassung, Erwartungswert und Varianz

Ziehen einer Stichprobe vom Umfang n ohne Zurücklegen aus einer Urne mit m Kugeln, von denen r rot und die übrigen weiss sind.

Zufallsvariable: X = Anzahl roter Kugeln

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{m-r}{n-x}}{\binom{m}{n}} \qquad (n < m,\ r < m)$$

Erwartungswert: $\mathrm{E}(X) = n \cdot \frac{r}{m}$

Varianz: $\mathrm{Var}(X) = n \cdot \frac{r}{m}\left(1 - \frac{r}{m}\right)\frac{m-n}{m-1}$

(Formelsammlung, S. 122)