Maturavorbereitung Mathematik

Kurzaufgaben

15. Mai 2022

Folgen und Reihen 1

Bestimme die ersten 4 Glieder der Folge $a_n = 3 + 4n$ und gib an, um welche Art von Folge es sich handelt.

Folgen und Reihen 1

$a_n = 3 + 4n$; $a_1 = 7$, $a_2 = 11$, $a_3 = 15$, $a_4 = 19$, ...

Es handelt sich um eine *arithmetische Folge*, da die Differenz aufeinanderfolgender Folgeglieder konstant ist.

Folgen und Reihen 2

Berechne $7 + 9 + 11 + \cdots + 203 + 205$.

Folgen und Reihen 2

Da die Differenz aufeinanderfolgender Folgeglieder konstant ist, handelt es sich um eine arithmetische Folge mit $a_1 = 7$, $a_n = 205$

Mit der explitzite Formel für die AF die Anzahl Summanden bestimmen:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)d \\
205 &= 7 + (n-1) \cdot 2 \\
198 &= (n-1) \cdot 2 \\
99 &= n - 1 \\
n &= 100
\end{aligned}
$$

Summenformel der AF: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ [Fundamentum, S. 52]

$$s_{100} = \frac{100}{2}(7 + 205) = 50 \cdot 212 = 10\,600$$

Folgen und Reihen 3

Bestimme die ersten 4 Glieder der Folge $a_n = 3 \cdot 2^n$ und gib an, um welche Art von Folge es sich handelt.

Folgen und Reihen 3

$a_n = 3 \cdot 2^n$; $a_1 = 6$, $a_2 = 12$, $a_3 = 24$, $a_4 = 48$, ...

Es handelt sich um eine *geometrische Folge*, da der Quotient aufeinanderfolgender Folgeglieder konstant ist.

Folgen und Reihen 4

Berechne die Summe der ersten 10 Glieder der Folge $a_n = 10 \cdot 2^n$.

Folgen und Reihen 4

Die Folgeglieder bilden eine geometrische Folge mit $a_1 = 10$ und $q = 2$.

Summenformel für die geometrische Folge:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$s_{10} = 10 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 10 \cdot \frac{1024 - 1}{1} = 10\,230$$

Folgen und Reihen 5

Gegeben: $a_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

Gesucht: $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

Folgen und Reihen 5

Summenformel für die nichtabbrechende geometrische Folge mit $|q| < 1$:

$$s = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{8}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{8}{1+\frac{1}{3}} = \frac{8}{\frac{4}{3}} = 6$$

Wachstum und Zerfall 1

Wie gross ist ein Kapital von 8000 Franken nach 14 Jahren, wenn es zu 2% pro Jahr verzinst wird und der Zins jährlich zum Kapital hinzugeschlagen wird?

Wachstum und Zerfall 1

$$K_{14} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$K_{14} = 8000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{14}$$

$$K_{14} = 8000 \cdot 1.02^{14} \approx 10\,556, \text{Franken}$$

Wachstum und Zerfall 2

Welches Kapital muss man heute anlegen, um bei einem Zinsfuss von 5% pro Jahr in 10 Jahren über ein Kapitel von 100 000 Franken zu verfügen, wenn der Zins jeweils am Jahresende zum Kapital hinzugeschlagen wird?

Wachstum und Zerfall 2

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ 100\,000 &= K_0 \cdot 1.05^{10} \\ K_0 &= \frac{100\,000}{1.05^{10}} \approx 61\,391 \text{ Franken} \end{aligned}$$

Wachstum und Zerfall 3

Zu welchem Zinsfuss muss man ein Kapital anlegen, damit es sich innerhalb von 20 Jahren verdreifacht, wenn der Zins jeweils am Jahresende zum Kapital hinzugeschlagen wird?

Wachstum und Zerfall 3

$$\begin{aligned}
K_{20} &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\
3 &= 1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} \\
\sqrt[20]{3} &= 1 + \frac{p}{100} \\
1.05647 &= 1 + \frac{p}{100} \\
p &\approx 5.6\%
\end{aligned}$$

Wachstum und Zerfall 4

Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital verdoppelt, wenn zu 1% pro Jahr verzinst wird und der Zins jährlich zum Kapital hinzugeschlagen wird?

Wachstum und Zerfall 4

$$
\begin{aligned}
K_n &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\
2 &= 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n \\
2 &= 1.01^n \\
\lg 2 &= n \cdot \lg 1.01 \\
n &= \frac{\lg 2}{\lg 1.01} \approx 70 \text{ Jahre}
\end{aligned}
$$

Wachstum und Zerfall 5

In einem Land beträgt die Inflation konstant 4% pro Jahr. Nach wie vielen Jahren hat sich der Geldwert halbiert?

Wachstum und Zerfall 5

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

$$0.5 = 1 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^n \quad \text{Inflation: negative Verzinsung}$$

$$0.5 = 0.96^n$$

$$\lg 0.5 = n \cdot \lg 0.96$$

$$n = \frac{\lg 0.5}{\lg 0.96} \approx 17\,\text{Jahre}$$

Analysis 1

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die stückweise definierte Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 + a & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Analysis 1

Die Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn f die Bedingung $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ erfüllt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} f(x) &= f(2) \\
\lim_{x \to 2} (x^2 + a) &= a \cdot 2 + 5 \\
4 + a &= 2a + 5 \\
a &= -1
\end{aligned}
$$

Analysis 2

Für welches a und b ist die stückweise definierte Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{für } x < 1 \\ bx^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Analysis 2

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn f diese Bedingungen erfüllt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{*}{=} f(x_0) \quad \text{(gleiche Werte = stetig)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \overset{**}{=} f'(x_0) \quad \text{(gleiche Tangentensteigungen)}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{für } x < 1 \\ bx^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} a & \text{für } x < 1 \\ 2bx & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{*}{=} f(1) \qquad \lim_{x \to 1} f'(x) \overset{**}{=} f'(1)$$

$$\lim_{x \to 1} (ax + 1) = b \qquad \lim_{x \to 1} a = 2b$$

$$a + 1 = b \quad (1) \qquad a = 2b \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen: $2b + 1 = b \quad \Rightarrow \quad b = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -2$

Analysis 3

Berechne die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0.

(a) $f(x) = x^3$; $x_0 = 2$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = \frac{1}{3}$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^x$; $x_0 = \ln(3)$

(e) $f(x) = \ln(x)$; $x_0 = 5$

Analysis 3

(a) $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad m = f'(2) = 12$

(b) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow$

$m = f'(1) = \frac{1}{2}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2} \quad \Rightarrow$

$m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{(1/3)^2} = -9$

(d) $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad m = f'(\ln 3) = e^{\ln 3} = 3$

(e) $f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow$

$m = f'(0.1) = \dfrac{1}{0.1} = 10$

Analysis 4

Leite die Funktion f ab und vereinfache das Ergebnis.

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + x - 5$

(b) $f(x) = (2x+1)(3x-1)$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

(d) $f(x) = \ln(x) \cdot x^2$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$

(h) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

(i) $f(x) = (2x+3)^7$

(j) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(k) $f(x) = \sin x^2$

(l) $f(x) = (\sin x)^2$

(m) $f(x) = \ln(\ln(x))$

Analysis 4

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + x - 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^2 - 8x + 1$

(b) $f(x) = (2x+1)(3x-1)$
$f'(x) = 2 \cdot (3x-1) + (2x+1) \cdot 3 = 6x - 2 + 6x + 3 = 12 + 1$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(d) $f(x) = \ln(x) \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot x^2 + \ln x \cdot 2x = x + 2x \ln x$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2+1) - 1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

(f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x - 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x} = x+1+\dfrac{1}{x} = x+1+x^{-1}$

$f'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

(h) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

(i) $f(x) = (2x+3)^7$

$f'(x) = 7(2x+3)^6 \cdot 2 = 14(2x+3)^6$

(j) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(k) $f(x) = \sin x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

(l) $f(x) = (\sin x)^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$

(m) $f(x) = \ln(\ln(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln x}$

Analysis 5

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f : y = x^2 + x$ an der Stelle $x = 1$.

Analysis 5

$$f(x) = x^2 + x$$

$$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = 1^2 + 1 = 2$$

$$f'(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

x_0, y_0 und m in die Tangentengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} y_0 &= m \cdot x_0 + q \\ 2 &= 3 \cdot 1 + q \\ q &= -1 \end{aligned}$$

Tangentengleichung: $t\colon y = 3x - 1$

Analysis 6

Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graphen der Funktion $f: y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 4$.

Analysis 6

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = \sqrt{4} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$m_t = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad m_n = -\frac{1}{m_t} = -4$$

x_0, y_0 und m in die Normalengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} y_0 &= m_n \cdot x_0 + q \\ 2 &= -4 \cdot 4 + q \\ q &= 18 \end{aligned}$$

Normalengleichung: $n\colon\ y = -4x + 18$

Analysis 7

Welchen spitzen Winkel schliesst die Tangente des Graphen der Funktion $f: y = \mathrm{e}^x$ an der Stelle $x = 0.5$ mit der x-Achse ein?

Analysis 7

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad m = f'(0.5) = \mathrm{e}^{0.5}$$

$$\varphi = \arctan m = \arctan \mathrm{e}^{0.5} = 58.76^\circ$$

Analysis 8

Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^3 + 4x^2 + x$ und $g(x) = x^2 - 6x + 11$ schneiden sich in einem Punkt. Berechne diesen Schnittpunkt und den spitzen Winkel, in dem sich die Graphen bzw. deren Tangenten dort schneiden.

Analysis 8

$f(x) = x^3 + 4x^2 + x$ und $g(x) = x^2 - 6x + 11$

Schnittstelle:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 + 4x^2 + x &= x^2 - 6x + 11 \\ x^3 + 3x^2 + 7x - 11 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 3 + 8 + 1 = 12 = m_1$$

$$g'(x) = 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad g'(1) = 2 - 6 = -4 = m_2$$

$$\varphi = \arctan\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \arctan\left|\frac{-4 - 12}{1 + 12 \cdot (-4)}\right|$$

$$= \arctan\frac{16}{47} = 18.80^\circ$$

Analysis 9

Bestimme den Definitionsbereich D der Funktion f.

(a) $f: y = x^3 + x^2 + x + 1$

(b) $f: y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$

(c) $f: y = \dfrac{x^3}{x^2 - 7x + 12}$

(d) $f: y = \sqrt{x}$

(e) $f: y = \sqrt{x + 2}$

(f) $f: y = \mathrm{e}^x$

(g) $f: y = \ln x$

Analysis 9

(a) $f\colon y = x^3 + x^2 + x + 1 \qquad D = \mathbb{R}$

(b) $f\colon y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^3}{x^2 - 7x + 12} = \dfrac{x^3}{(x-3)(x-4)} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$

(d) $f\colon y = \sqrt{x} \qquad D = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leq x\}$

(e) $f\colon y = \sqrt{x+2} \qquad D = [-2, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon -2 \leq x\}$

(f) $f\colon y = \mathrm{e}^x \qquad D = \mathbb{R}$

(g) $f\colon y = \ln x \qquad D = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < x\}$

Analysis 10

Bestimme den Ordinatenabschnitt der Funktion f, sofern dieser existiert.

(a) $f\colon y = 2x - 7$

(b) $f\colon y = x^3 - 2x^2 - 3x$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

(d) $f\colon y = \ln x$

(e) $f\colon y = \mathrm{e}^x$

(f) $f\colon y = \sqrt{4 - x^2}$

Analysis 10

(a) $f(0) = 2 \cdot 0 - 7 = -7$

(b) $f(0) = x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

(c) $f(0) = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$

(d) $f(0) = \ln 0$ ist nicht definiert

(e) $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

(f) $f(0) = \sqrt{4-0} = 2$

Analysis 11

Bestimme allfällige Nullstellen der Funktion f möglichst ohne Taschenrechner.

(a) $f: y = 2x - 7$

(b) $f: y = x^3 - 2x^2 - 3x$

(c) $f: y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

(d) $f: y = \ln x$

(e) $f: y = \mathrm{e}^x$

(f) $f: y = \sqrt{4 - x^2}$

Analysis 11

(a) $0 = 2x - 7 \quad \Rightarrow \quad x = 3.5$

(b)
$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 2x^2 - 3x \\ 0 &= x(x^2 - 2x - 3) \\ 0 &= x(x+1)(x-3) \\ x_1 &= 0,\; x_2 = -1,\; x_3 = 3 \end{aligned}$$

(c)
$$0 = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$x = -1 \quad (x = 1$ liegt nicht im Definitionsbereich$)$

(d) $0 = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = 1$

(e) $0 = e^x$ keine Nullstellen

(f)
$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{4 - x^2} \\ 0 &= 4 - x^2 = (2-x)(2+x) \\ x_1 &= -2,\; x_2 = 2 \end{aligned}$$

Analysis 12

Untersuche die Funktion f auf eine allfällige Symmetrie ihres Graphen G_f. Liegt eine Symmetrie vor, so ist diese nachzuweisen.

(a) $f\colon y = 2x^5 - 4x^3$

(b) $f\colon y = x^2 + 6x + 8$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^3 + x}{x}$

Analysis 12

(a) $f: y = 2x^5 - 4x^3$
G_f ist symmetrisch zum Ursprung, denn
$$f(-x) = 2(-x)^5 - 4(-x)^3 = -2x^5 + 4x^3$$
$$= -(2x^5 - 4x^3) = f(x) \text{ für alle } x \in D$$

(b) $f: y = x^2 + 6x + 8$
G_f ist weder symmetrisch zum Ursprung noch zur y-Achse.

(c) $f: y = \dfrac{x^3 + x}{x}$
G_f ist symmetrisch zur y-Achse, denn
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)} = \frac{-x^3 - x}{-x} = \frac{-(x^3 + x)}{-x}$$
$$= \frac{x^3 + x}{x} = f(x) \text{ für alle } x \in D$$

Analysis 13

Bestimme alle Asymptoten der Funktion f.

(a) $f: y = 3x + \dfrac{1}{x-1}$

(b) $f: y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 9}$

(c) $f: y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x - 2}$

(d) $f: y = \dfrac{x - 7}{x^2 + 1}$

Analysis 13

(a) $f : y = 3x + \dfrac{1}{x-1}$

vertikale Asymptote: $x = 1$

schiefe Asymptote: $g(x) = 3x$, denn $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

(b) $f: y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 9} = \dfrac{2x^2 + x + 1}{(x-3)(x+3)}$

vertikale Asymptoten: $x = -3$ und $x = 3$

$$\begin{array}{l} \big(\quad 2x^2 + x \quad + 1\big) : \big(x^2 - 9\big) = 2 + \dfrac{x+19}{x^2-9} \\ \underline{-\,2x^2 \qquad\quad + 18} \\ \qquad\qquad\quad x + 19 \end{array}$$

horizontale Asymptote: $g(x) = 2$, denn $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} \frac{x+19}{x^2-9} = 0$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$

vertikale Asymptote: $x = 2$

$$
\begin{array}{rrrl}
(& x^2 + 3x & -3) & : (x-2) = x + 5 + \dfrac{7}{x-2} \\
& \underline{-x^2 + 2x} & & \\
& 5x & -3 & \\
& \underline{-5x} & \underline{+10} & \\
& & 7 &
\end{array}
$$

schiefe Asymptote: $g(x) = x + 5$, denn $\lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{7}{x-2} = 0$

(d) $f: y = \dfrac{x-7}{x^2+1}$

vertikale Asymptoten: keine (x^2+1 hat keine Lösung)

horizontale Asymptote: $g(x) = 0$, denn $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{x-7}{x^2+1} = 0$

Analysis 14

Bestimme alle Extrempunkte der Funktion
$f\colon y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Analysis 14

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ f''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x - 9 &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Test:

$$f''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(-1, 10)$$

$$f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(2, -22)$$

Analysis 15

Bestimme alle Wendepunkte der Funktion $f\colon y = x^4 - 6x^2$

Analysis 15

Ableitungen:
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 6x^2 \\
f'(x) &= 4x^3 - 12x \\
f''(x) &= 12x^2 - 12 \\
f'''(x) &= 24x
\end{aligned}
$$

Kandidaten:
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
12x^2 - 12 &= 0 \\
x_1 &= -1 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Test:

$$f'''(-1) = -24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}_1(-1, -5)$$

$$f'''(1) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}_2(1, -5)$$

Analysis 16

Bestimme den Wendepunkt der Funktion
$f: y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$. Handelt es sich um einen speziellen Wendepunkt?

Analysis 16

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 12x - 5 \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 12 \\ f''(x) &= 6x - 12 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Kandidaten: $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

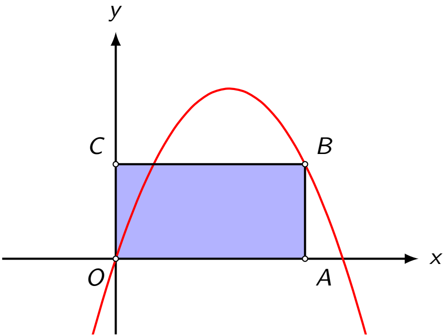
Test: $f'''(2) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(2,3)$

Terrassenpunkt?

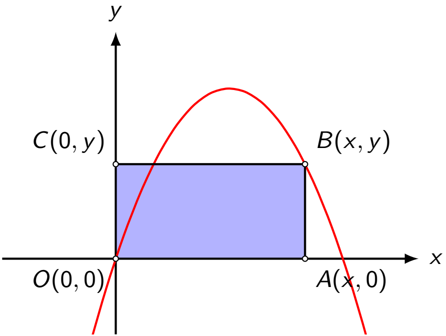
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 12 = 12 - 24 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ja}$

Analysis 17

Der Punkt B liegt im 1. Quadranten auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 3x - x^2$. Für welche Wahl von B ist der Flächeninhalt des achsenparallelen Rechtecks $OABC$ maximal?



Analysis 17



Zielfunktion: $A(x, y) = x \cdot y$ (ZF)

Nebenbedingung: $y = 3x - x^2$ (NB)

NB in ZF : $A(x) = x \cdot (3x - x^2) = 3x^2 - x^3$

$$\text{Ableitungen: } \begin{aligned} A'(x) &= 6x - 3x^2 \\ A''(x) &= 6 - 6x \end{aligned}$$

$$\text{Kandidaten: } \begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ 6x - 3x^2 &= 0 \\ 3x(2-x) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Test:

$A''(0) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ist Minimalstelle

$A''(2) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ ist Maximalstelle

Der gesuchte Punkt ist $B(2, 2)$.

Analysis 18

Bestimme die Gleichung einer Parabel 3. Ordnung, welche die x-Achse an der Stelle $x = 2$ berührt und im Punkt $W(0, 4)$ einen Wendepunkt hat.

Analysis 18

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ableitungen: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$f(2) = 0$: $8a + 4b + 2c + d = 0 \quad (1)$

$f'(2) = 0$: $12a + 4b + c = 0 \quad (2)$

$f(0) = 4$: $d = 4 \quad (3)$

$f''(0) = 0$: $2b = 0 \quad (4)$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 4$

Analysis 19

Für welchen Wert von a schneiden sich die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 + ax + 1$ und $g(x) = 2x + a$ an der Stelle $x = 3$?

Analysis 19

$f: y = x^2 + ax + 1;\ g: y = 2x + a$

$$\begin{aligned} f(3) &\overset{!}{=} g(3) \\ 9 + 3a + 1 &= 6 + a \\ 2a &= -4 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Analysis 20

Für welchen Wert von a berühren sich die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 + ax + b$ und $g(x) = bx + 2$ an der Stelle $x = 1$?

Analysis 20

$$f(x) = x^2 + ax + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + a$$

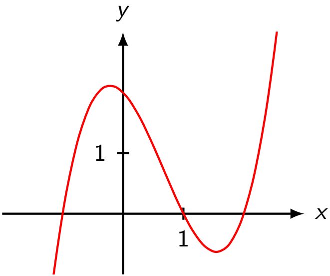
$$g(x) = bx + 2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = b$$

$$\begin{aligned} f(1) &\overset{!}{=} g(1) \\ 1 + a + b &= b + 2 \\ a &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'(1) &\overset{!}{=} g'(1) \\ 2 + a &= b \\ 2 + 1 &= b \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Analysis 21

Bestimme den Inhalt der endlichen Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ eingeschlossen ist.

Analysis 21



Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

$$I_2 = \int_{1}^{2} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{1}^{2} = -\frac{5}{12}$$

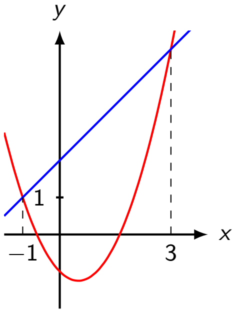
$$A = I_1 + |I_2| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$

Analysis 22

Berechne den Inhalt des von den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 - x + 1$ und $g(x) = x + 4$ eingeschlossenen endlichen Flächenstücks.

Analysis 22

$f(x) = x^2 - x + 1$ und $g(x) = x + 4$



Schnittstellen:

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 1 &= x + 2 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
(x+1)(x-3) &= 1 \\
x_1 &= -1 \\
x_2 &= 3
\end{aligned}
$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left((x+4) - (x^2 - x + 1) \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3 \right) \mathrm{d}x$$

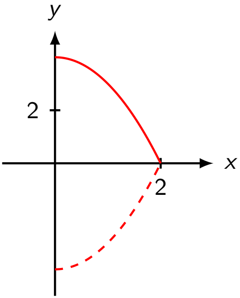
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

Analysis 23

Der im ersten Quadranten liegende Teil der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 4 - x^2$ wird um die x-Achse gedreht. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers.

Analysis 23

$f(x) = 4 - x^2$



Schnittstellen: $4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

$$V = \pi \int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right) \mathrm{d}x$$

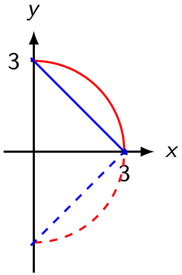
$$= \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{256\pi}{15}$$

Analysis 24

Die zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ und $g(x) = 3 - x$ liegende Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers.

Analysis 24

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = 3 - x$



Schnittstellen: $\sqrt{9 - x^2} = 3 - x \quad ||^2$

$$9 - x^2 = 9 - 6x + x^2$$

$$0 = 2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$V_{\text{aussen}} = \pi \int_0^3 \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(9 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 18\pi$$

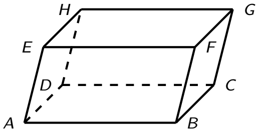
$$V_{\text{innen}} = \pi \int_0^3 (3 - x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(9 - 6x + x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[9x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 9\pi$$

$$V = V_{\text{aussen}} - V_{\text{aussen}} = 18\,\pi - 9\,\pi = 9\pi$$

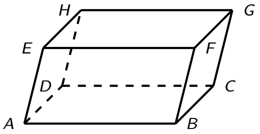
Vektorgeometrie 1

Gegeben sind die Ecken $A(-2,3,1)$, $B(4,5,7)$, $D(-1,4,2)$ und $E(6,2,10)$ eines Spats. Bestimme die Koordinaten der übrigen Ecken C, F, G und H.



Vektorgeometrie 1

Gegeben: $A(-2,3,1)$, $B(4,5,7)$, $D(-1,4,2)$ und $E(6,2,10)$



$$\vec{r}_C = \vec{r}_D + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(5,6,8)$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_B + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(12,4,16)$$

$$\vec{r}_G = \vec{r}_C + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(13,5,17)$$

$$\vec{r}_H = \vec{r}_D + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(7,3,11)$$

Vektorgeometrie 2

Bestimme den Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten $A(-2, 3, 1)$ und $B(4, 5, 7)$.

Vektorgeometrie 2

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(1, 4, 4)$$

[Fundamentum S. 45]

Vektorgeometrie 3

Untersuche, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Vektorgeometrie 3

1. Lösung: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear, wenn es eine Zahl k mit $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ oder $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ gibt.

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 6\alpha &= -4 \\ -12\alpha &= 8 \\ 24\alpha &= -16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= -\tfrac{2}{3} \\ \alpha &= -\tfrac{2}{3} \\ \alpha &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear.

2. Lösung: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear, wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 192 - 192 \\ -96 + 96 \\ 48 - 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear.

Vektorgeometrie 4

Berechne die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie 4

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2} = 9$$

Vektorgeometrie 5

Berechne den Abstand der Punkte $A(11, -1, 9)$ und $B(2, 1, 3)$.

Vektorgeometrie 5

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{81 + 4 + 36} = \sqrt{121} = 11$$

Vektorgeometrie 6

Berechne $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie 6

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 \cdot 0 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 2 = -15 + 8 = -7$$

Vektorgeometrie 7

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Vektorgeometrie 7

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 48 - 8 - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Vektorgeometrie 8

Berechne den spitzen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie 8

$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|4+0-10|}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{16+0+25}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

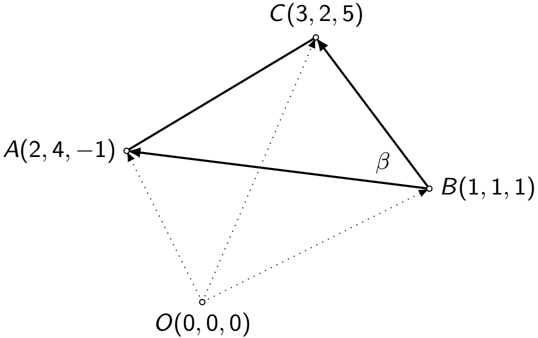
$$\varphi = \arccos\frac{1}{2} = 71.80^\circ$$

(Die Betragszeichen im Zähler garantieren, dass der spitze Winkel berechnet wird.)

Vektorgeometrie 9

Berechne den Winkel β im Dreieck mit den Ecken $A(2, 4, -1)$, $B(1, 1, 1)$ und $C(3, 2, 5)$.

Vektorgeometrie 9



$$\overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\cos\beta = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{2+3-8}{\sqrt{1+9+4}\cdot\sqrt{4+1+16}}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}} \Rightarrow \beta = 100.08^\circ$$

Vektorgeometrie 10

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit $A(-2, 1, 3)$, $B(3, 5, 6)$ und $C(-1, 5, 2)$.

Vektorgeometrie 10

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-16\\8\\16\end{pmatrix}\right| = 12$$

Vektorgeometrie 11

Berechne das Volumen des Spats, der durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Vektorgeometrie 11

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\,\right| = 40$$

Vektorgeometrie 12

Berechne das Volumen des Tetraeders mit den Ecken $A(1, 0, 2)$, $B(2, 3, 4)$, $C(3, 2, 5)$ und $D(4, 4, 6)$.

Vektorgeometrie 12

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3 = 0.5$$

Vektorgeometrie 13

Stelle eine Gleichung der Geraden durch die Punkte $A(3, -2, 5)$ und $B(4, 1, 7)$ auf.

Vektorgeometrie 13

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 14

Liegt der Punkt $P(13, 1, -10)$ auf der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

Vektorgeometrie 14

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcl} 13 &=& 7 - 3t & & t = -2 & & \\ 1 &=& 3 + t & \Rightarrow & t = -2 & \Rightarrow & \text{ja} \\ -10 &=& -6 + 2t & & t = -2 & & \end{array}$$

Vektorgeometrie 15

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(7, 6, 3)$ geht und parallel zur Geraden
$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Vektorgeometrie 15

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 16

Bestimme den 1. und 2. Spurpunkt der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektorgeometrie 16

Siehe Fundamentum S. 47

$S_1(x,y,0)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$x = 3$

$y = -2 + t \quad \Rightarrow \quad t = 3 \quad \Rightarrow \quad S_1(3,1,0)$

$0 = 6 - 2t$

$S_2(0,x,y)$: $\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$0 = 3$ Widerspruch

$y = -2 + t$

$z = 6 - 2t$

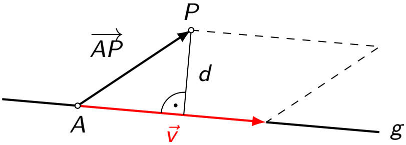
S_2 existiert nicht (g ist parallel zur x-Achse)

Vektorgeometrie 17

Bestimme den Abstand des Punktes $P(0,3,7)$ von der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektorgeometrie 17



$$\overrightarrow{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix};\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -18 \\ 22 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = 7$$

Vektorgeometrie 18

Zeige, dass sich die Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne den Schnittpunkt sowie den spitzen Schnittwinkel.

Vektorgeometrie 18

Die beiden Geradengleichungen gleichsetzen:

$A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$

Stellt man diese Vektorgleichung zeilenweise dar, erhält man ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es hat die Lösung $s = -2$, $t = 1$.

Einsetzen von $s = -2$ in g (oder $t = 1$ in h): Schnittpunkt $S(1, 3, -4)$.

Der Schnittwinkel ist der spitze Winkel zwischen den Richtungsvektoren: $\angle(g, h) = 78.9^\circ$

Vektorgeometrie 19

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die Punkte $A(9, -3, -1)$, $B(5, 0, 1)$ und $C(2, 6, 7)$ definiert wird.

Vektorgeometrie 19

Richtungsvektoren der Ebene: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

Setze die Koordinaten von einem der drei Punkte in die Gleichung

$\varepsilon\colon 2x + 6y - 5z + d = 0$

ein und löse nach d auf. $\Rightarrow \varepsilon\colon 2x + 6y - 5z - 5 = 0$

Vektorgeometrie 20

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt $P(-1, 3, 5)$ und die Gerade
$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmt wird.

Vektorgeometrie 20

Richtungsvektoren der Ebene: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Setze die Koordinaten von einem der Punkte $P(-1, 3, 5)$ oder $A(4, 2, 4)$ in

$\varepsilon\colon x + 2y + 3z + d = 0$

ein und löse nach d auf. $\Rightarrow \varepsilon\colon x + 2y + 3z - 20 = 0$

Vektorgeometrie 21

Untersuche, ob der Punkt $P(9, 5, -1)$ in der Ebene
$\varepsilon\colon 2x - 3y + 4z + 1 = 0$ liegt.

Vektorgeometrie 21

Setze die Koordinaten des Punkts $P(9, 5, -1)$in die Koordinatengleichung ein.

Wegen $0 = 0$ gilt $P \in \varepsilon$.

Vektorgeometrie 22

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ, die parallel zur Ebene $\varepsilon\colon 3x + 7y + z - 2 = 0$ liegt und durch den Punkt $P(4,4,4)$ geht.

Vektorgeometrie 22

Eine parallele Ebene hat den gleichen Normalenvektor wie ε. Also müssen wir die Koordinaten des Punkts $P(4,4,4)$ in die Gleichung $\delta\colon 3x + 7y + z + d = 0$ einsetzen und nach d auflösen $\Rightarrow$
$\delta\colon 3x + 7y + z - 44 = 0$

Vektorgeometrie 23

Berechne den Abstand des Punktes $P(1, 2, 3)$ von der Ebene
$\varepsilon\colon 9x + 12y + 20z + 15 = 0$.

Vektorgeometrie 23

Setze die Koordinaten von $P(1,2,3)$ in die Hessesche Abstandsformel ein:

$$\text{dist}(P,\varepsilon) = \frac{9\cdot 1 + 12\cdot 2 + 20\cdot 3}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}} = 4.32$$

Vektorgeometrie 24

Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene ε: $3x - y + 2z + 12 = 0$

Vektorgeometrie 24

Um den x-Achensbschnitt zu bestimmen, muss der Punkt A(x,0,0)in die Koordinatengleichung eingesetzt und diese nach x aufgelöst werden. Bei den anderen Achsenabschnitte geht man analog vor.

x-Achsenabschnitt: $x = -4$

y-Achsenabschnitt: $y = 12$

z-Achsenabschnitt: $y = -6$

Vektorgeometrie 25

Berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$ mit der Ebene

$\varepsilon: 3x - y + 4z - 15 = 0.$

Vektorgeometrie 25

Zerlege die Geradengleichung in ihre Komponenten:

$x = -4 + 2t$, $y = -10 + 3t$ und $z = 8 - 2t$

setze diese Terme in die Koordinatengleichung ein:

$3 \cdot (-4 + 2t) - 1 \cdot (-10 + 3t) + 4 \cdot (8 - 2t) - 15 = 0$

und setze die Lösung $t = 3$ in die Geradengleichung ein: $S(2, -1, 2)$

Für den Winkel zwischen Gerade und Ebene Berechne den spitzen Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}_\varepsilon$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ der Geraden und ergänze das Resultat auf 90°:
$\angle(g, \varepsilon) = 13.76°$

Vektorgeometrie 26

Spiegle den Punkt $P(5, -2, 1)$ an der Ebene
$\varepsilon\colon x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Vektorgeometrie 26

Zerlege die zu ε senkrechte Gerade durch P

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in ihre Komponenten:

$x = 5 + t$, $y = -2 - 2t$ und $z = 1 + 3t$

setze diese Terme in die Koordinatengleichung ein:

$1 \cdot (5 + t) - 2 \cdot (-2 - 2t) + 3 \cdot (1 + 3t) - 5 = 0$

und setze die verdoppelte Lösung $2t = -1$ in die Geradengleichung ein: $P'(4, 0, -2)$

Vektorgeometrie 27

Zeige, dass sich die beiden Ebenen $\varepsilon\colon 3x + 2y + z + 5 = 0$ und $\delta\colon 2x + y + 2z + 4 = 0$ schneiden, indem du eine Gleichung der Schnittgeraden s bestimmst.

Vektorgeometrie 27

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden s steht senkrecht auf beiden Ebenen:

$$\vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für einen Anfangspunkt der Geraden wählen wir einen Punkt mit einfachen Koordinaten, der auf beiden Ebenen liegen soll. Zum Beispiel: $P(x, y, 0)$

Setze diese Koordinaten in die beiden Ebenengleichungen ein und versuche, das zugehörige Gleichungssystem zu lösen. Wenn es eine Lösung besitzt, haben wir einen Punkt der Schnittgeraden gefunden. Anderfalls setzt man eine der anderen beiden Koordinaten null. (Früher oder später wird man erfolgreich sein, da die Schnittgerade nicht zu allen Koordinatenebenen parallel sein kann.)

$$\varepsilon \cap \delta = s \text{ mit } s\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Stochastik 1

Berechne das arithmetische Mittel, die Standardabweichung und den Median der Stichprobenwerte:

$x_1 = 5.2,\ x_2 = 3.2,\ x_3 = 5.8,\ x_4 = 5.3,\ x_5 = 3.0$

Stochastik 1

Stichprobe: $x_1 = 5.2$, $x_2 = 3.2$, $x_3 = 5.8$, $x_4 = 5.3$, $x_5 = 3.0$

- empirisches arithmetisches Mittel:
  $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(5.2 + 3.2 + 5.8 + 5.3 + 3.0) = 4.5$$
  Der Zusatz „empirisch“ bezieht sich darauf, dass die Daten eine Stichprobe und keine Grundgesamtheit darstellen.
- empirische Varianz:
  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 =$$
  $$\frac{1}{4}(0.7^2 + 1.3^2 + 1.3^2 + 0.8^2 + 1.5^2) = 1.69$$
  Die „normale“ Varianz einer Stichprobe würde die Varianz der Grundgesamtheit systematisch zu tief schätzen. Diesen Schätzungsfehler wird korrigiert, indem man die Summe der quadratischen Abweichungen vom Mittelwert durch $n-1$ statt durch n dividiert.
  $$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1.69} = 1.3$$
- Der Median $\tilde{x}$ halbiert die Liste der sortierten

Stochastik 2

Ein fairer Spielwürfel wird zweimal nacheinander geworfen.
Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(a) P(die Augensumme beträgt 2)
(b) P(die Augensumme beträgt 3)
(c) P(beide Augenzahlen sind gleich)
(d) P(beide Augenzahlen sind verschieden)
(e) P(Mindestens ein Würfel hat eine Augenzahl grösser als 4)
(f) P(die Augensumme ist grösser als 8)

Stochastik 2

(a) $P(\text{die Augensumme beträgt 2})$
$p = P(11) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

(b) $P(\text{die Augensumme beträgt 3})$
$p = P(12, 21) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

(c) $P(\text{beide Augenzahlen sind gleich})$
$p = P(11, 22, \ldots, 66) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(d) $P(\text{beide Augenzahlen sind verschieden})$
Gegenereignis: $p = 1 - P(11, 22, \ldots, 66) \stackrel{(c)}{=} 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(e) P(Mindestens ein Würfel zeigt ⚄ oder ⚅)
$p = 1 - P$(kein Würfel zeigt ⚄ oder ⚅) $= 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

(f) $P(\text{die Augensumme ist grösser als 8})$
$p = P(63, 54, 45, 36, 64, 55, 46, 65, 56, 66) = 10 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$

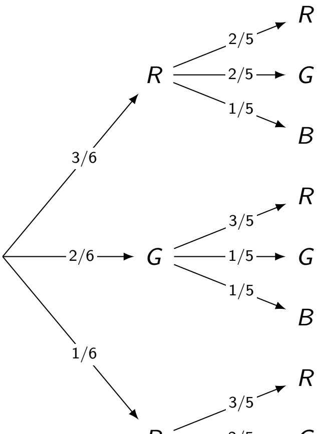
Stochastik 3

In einer Schachtel befinden sich 3 rote Kugeln, 2 grüne Kugeln und 1 blaue Kugel. Es werden nacheinander und ohne hinsehen zwei Kugeln gezogen und deren Farbe notiert. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(a) P(die Kugeln haben die Farben Rot und Grün)
(b) P(die Kugeln haben die Farben Rot oder Grün)
(c) P(mindestens eine Kugel ist grün)
(d) P(die Kugeln haben die gleiche Farbe)
(e) P(die Kugeln haben verschiedene Farben)
(f) P(es wurde keine rote Kugel gezogen)

Stochastik 3

Hat ein mehrstufiges Experiment nicht allzu viele Stufen, dann lohnt es sich, das Problem durch einen Baum zu modellieren. Danach könne die gesuchten Wahrscheinlichkeiten aus den Summen der entsprechenden Pfadwahrscheinlichkeiten bestimmt werden.



$P(RR) = \frac{6}{30}$

$P(RG) = \frac{6}{30}$

$P(RB) = \frac{3}{30}$

$P(GR) = \frac{6}{30}$

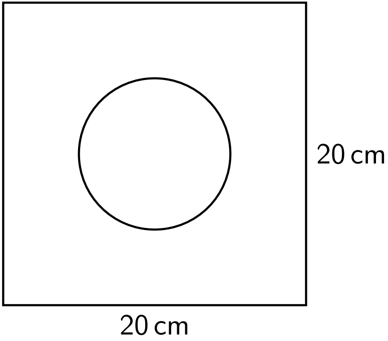
$P(GG) = \frac{2}{30}$

$P(GB) = \frac{2}{30}$

$P(BR) = \frac{3}{30}$

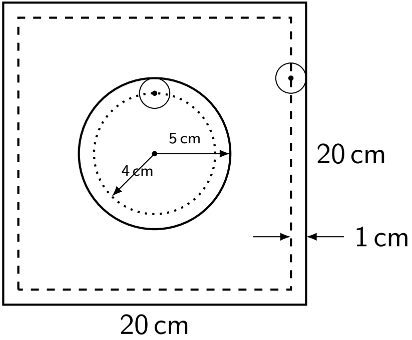
Stochastik 4

In der Mitte des Bodens einer Holzkiste mit quadratischer Grundfläche ($a = 20\,\text{cm}$) ist ein Kreis mit Radius $r = 5\text{cm}$ eingezeichnet.



In diese Kisten wird eine Münze mit dem Durchmesser $d = 2\,\text{cm}$ geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt sie ganz im Innern des Kreises zur Ruhe? (Die Breite der Kreislinie kann vernachlässigt werden.)

Stochastik 4



mögliche Fälle: Der Mittelpunkt der Münze liegt innerhalb der unterbrochenen Linie:

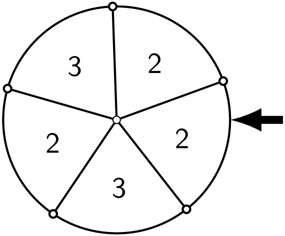
$M = 18\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 324\,\text{cm}^2$

günstige Fälle: Der Mittelpunkt der Münze liegt innerhalb der gepunkteten Linie:

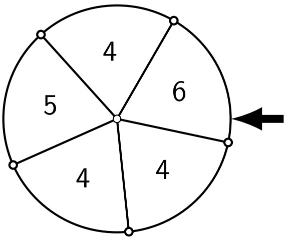
$G = \pi \cdot (4\,\text{cm})^2 = 16\pi\,\text{cm}^2$

Stochastik 5

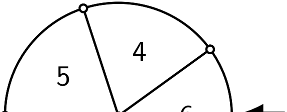
Ein Zufallsexperiment mit drei Glücksrädern mit je 5 Sektoren funktioniert wie folgt: Zuerst wird das Glücksrad 1 gedreht. Die beim Stillstand angezeigte Zahl bestimmt das Glücksrad, welches als nächstes gedreht werden soll. Dann wird dieses Glücksrad gedreht und die nach dem Stillstand angezeigte Zahl ist das Ergebnis.



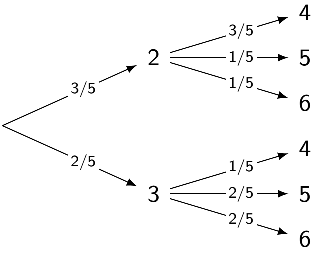
Glücksrad 1



Glücksrad 2



Stochastik 5



$P(2,4) = \frac{9}{25}$

$P(2,5) = \frac{3}{25}$

$P(2,6) = \frac{3}{25}$

$P(3,4) = \frac{2}{25}$

$P(3,5) = \frac{4}{25}$

$P(3,6) = \frac{4}{25}$

X: Wert der notierten Zahl

Y: Nummer des Glücksrads

(a) $P(X = 5) = P(2,5) + P(3,5) = \frac{3}{25} + \frac{4}{25} = \frac{7}{25}$

(b) $$P(X = 4|Y = 2) = \frac{P(X = 4, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{P(2,4) + P(3,4)}{P(2, \text{egal})} = \frac{\frac{9}{25} + \frac{2}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{11}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{11}{15}$$

Stochastik 6

Jeder Buchstabe des Wortes ABSURD wird auf eine Karte geschrieben. Wie viele Wörter (auch sinnlose) lassen sich so bilden?

Stochastik 6

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720\,\text{Wörter}$

Stochastik 7

Jeder Buchstabe des Wortes EIGENSINNIG wird auf eine Karte geschrieben. Wie viele Wörter (auch sinnlose) lassen sich so bilden?

Stochastik 7

Buchstabe	E	I	G	N	S
Häufigkeit	2	3	2	3	1

$$\frac{11!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!} = 277\,200 \text{ Wörter}$$

Stochastik 8

Zur Ermittlung des Siegers eines Fussballmatchs müssen 5 Elfmeter auf das gegnerische Tor ausgeführt werden. Auf wie viele Arten können die 10 Feldspieler diese 5 Torschüsse ausführen, wenn

(a) jeder Spieler höchstens einmal schiessen darf,

(b) ein Spieler auch mehrmals schiessen darf?

Stochastik 8

(a) Jeder Spieler darf höchstens einmal schiessen:
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \dfrac{10!}{5!} = 30\,240$ Möglichkeiten

(b) Ein Spieler darf auch mehrmals schiessen:
$10^5 = 500\,000$ Möglichkeiten

Stochastik 9

Aus einer Schulklasse mit 7 Schülerinnen und 8 Schülern soll eine vierköpfige Delegation gebildet werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich ...

(a) wenn es keine Einschränkungen bezüglich der Geschlechterzusammensetzung gibt,

(b) wenn von jedem Geschlecht mindestens eine Person in der Delegation sein muss?

Stochastik 9

(a) $\binom{15}{4} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1365$

(b) $\binom{7}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{7}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{7}{3} \cdot \binom{8}{1} = 1260$

oder vom Resultat in (a) alle eingeschlechtlichen Delegationen subtrahieren:

$1365 - \binom{7}{4} - \binom{8}{4} = 1260$

Stochastik 10

Unter 5 Kindern sollen 17 gleich aussehende Kekse verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür,

(a) wenn es keine Einschränkungen bei der Verteilung gibt,

(b) wenn jedes Kind mindestens 3 Kekse erhalten soll?

Stochastik 10

(a) $\binom{17+4}{4} = \binom{21}{4} = 5985\,\text{Möglichkeiten}$

(b) Erhält jedes Kind 3 Kekse, dann bleiben noch 2 Kekse zu verteilen:
$\binom{2+4}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15\,\text{Möglichkeiten}$

Stochastik 11

In einem Reagal befinden sich 45 Musik-CDs, die zu den folgenden Genres gehören:

Genre	Pop	Jazz	Country	Klassik
Anzahl	20	12	5	8

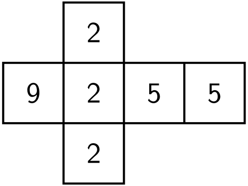
Auf wie viele Arten lassen sich die CDs im Regal anordnen, wenn die zum gleichen Genre gehörenden CDs jeweils nebeneinander stehen sollen?

Stochastik 11

Auf $4! \cdot 20! \cdot 12! \cdot 5! \cdot 8! = 1.35 \cdot 10^{35}$ Arten

Stochastik 12

Die sechs Flächen eines fairen Spielwürfels erhalten eine alternative Beschriftung gemass folgendem Netz:



Der Würfel wird 24 Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei ...

(a) genau 12 Mal die Zahl 2 erscheint,
(b) höchstens 7 Mal die Zahl 5 erscheint,
(c) mindestens 3 Mal die Zahl 9 erscheint?

Die Zufallsvariable Y sei die Häufigkeit der Zahl 5 in 24 Würfen.

(d) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung von Y.

Stochastik 12

$P_1(2) = \frac{1}{2}$, $P_1(5) = \frac{1}{3}$, $P_1(9) = \frac{1}{6}$

X: Anzahl 2en

Y: Anzahl 5en

Z: Anzahl 9en

(a) $P_{24}(X = 12) = \binom{24}{12} \cdot 0.5^{12} \cdot 0.5^{12} = 0.1612$

(b) $P_{24}(Y \leq 7) = \sum_{k=0}^{7} \binom{24}{k} \cdot (1/3)^k \cdot (2/3)^{24-k} = 0.4328$

(c) $P_{24}(Z \geq 3) = 1 - P_{24}(Z \leq 2) =$

$$1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{24}{k} \cdot (1/6)^k \cdot (5/6)^{24-k} = 0.7882$$

Die Zufallsvariable Y sei die Häufigkeit der Zahl 5 in 24 Würfen.

(d) Erwartungswert von Y: $\mu = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8$

Standardabweichung von Y: $\sigma = \sqrt{24 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{48}{9}} = 2.309$

Stochastik 13

Jemand (die „Bank“ B) bietet folgendes Spiel an: Ein Spieler (S) wirft drei faire Münzen.

- Bei dreimal Zahl erhält S von B Fr. 5.–.
- Bei zweimal Zahl erhält S von B Fr. 3.–.
- Bei einmal Zahl erhält S von B Fr. 1.–.
- Bei dreimal Wappen erhält B von S Fr. 15.–.

(a) Bestimme den Erwartungswert aus der Sicht des Spielers.

(b) Wie muss der Betrag bei dreimal Wappen geändert werden, damit das Spiel fair ist?

Stochastik 13

X: Erfolg des Spielers S

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

Erfolg x in Fr.	Ereignis $X = x$	$P(X = x)$
5	ZZZ	$\frac{1}{8}$
3	ZZW, ZWZ, WZZ	$\frac{3}{8}$
1	ZWW, WZW, WWZ	$\frac{3}{8}$
-15	WWW	$\frac{1}{8}$

(a) $\mathrm{E}(X) = 5 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} - 15 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = 0.25$ Franken

(b) $\mathrm{E}(X) = 5 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + e \cdot \frac{1}{8} = 0$

$$5 + 9 + 3 + e = 0$$

$$e = -17 \text{ Franken}$$

Stochastik 14

Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 73$ und der Standardabweichung $\sigma = 4$. Bestimme die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(a) $P(X < 70)$

(b) $P(71 < X < 74)$

(c) $P(X > 72)$

Stochastik 14

Es genügt, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

durch $\varphi_{73,4}(x)$ abzukürzen. Die folgenden Integrale können nicht elementar berechnet werden. Deshalb benötigt man einen geeigneten Taschenrechner bzw. eine geeignete Tabelle.

(a) $P(X < 70) = \int_{-\infty}^{70} \varphi_{73,4}(x)\,\mathrm{d}x = 0.2266$

(b) $P(71 < X < 74) = \int_{71}^{74} \varphi_{73,4}(x)\,\mathrm{d}x = 0.2901$

(c) $P(X > 73) = \int_{73}^{\infty} \varphi_{73,4}(x)\,\mathrm{d}x = 0.5$

Version vom 15. Mai 2022