Folgen und Reihen 1

Bestimme die ersten 4 Glieder der Folge $a_n = 3 + 4n$ und gib an, um welche Art von Folge es sich handelt.

Folgen und Reihen 2

Berechne $7 + 9 + 11 + \cdots + 203 + 205$.

Folgen und Reihen 3

Bestimme die ersten 4 Glieder der Folge $a_n = 3 \cdot 2^n$ und gib an, um welche Art von Folge es sich handelt.

Folgen und Reihen 4

Berechne die Summe der ersten 10 Glieder der Folge $a_n = 10 \cdot 2^n$.

Folgen und Reihen 5

Gegeben: $a_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

Gesucht: $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

Wachstum und Zerfall 1

Wie gross ist ein Kapital von 8000 Franken nach 14 Jahren, wenn es zu 2% pro Jahr verzinst wird und der Zins jährlich zum Kapital hinzugeschlagen wird?

Wachstum und Zerfall 2

Welches Kapital muss man heute anlegen, um bei einem Zinsfuss von 5% pro Jahr in 10 Jahren über ein Kapitel von 100 000 Franken zu verfügen, wenn der Zins jeweils am Jahresende zum Kapital hinzugeschlagen wird?

Wachstum und Zerfall 3

Zu welchem Zinsfuss muss man ein Kapital anlegen, damit es sich innerhalb von 20 Jahren verdreifacht, wenn der Zins jeweils am Jahresende zum Kapital hinzugeschlagen wird?

Wachstum und Zerfall 4

Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital verdoppelt, wenn zu 1% pro Jahr verzinst wird und der Zins jährlich zum Kapital hinzugeschlagen wird?

Wachstum und Zerfall 5

In einem Land beträgt die Inflation konstant 4% pro Jahr. Nach wie vielen Jahren hat sich der Geldwert halbiert?

Analysis 1

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die stückweise definierte Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 + a & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Analysis 2

Für welches a und b ist die stückweise definierte Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{für } x < 1 \\ bx^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Analysis 3

Berechne die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0.

(a) $f(x) = x^3$; $x_0 = 2$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x_0 = \dfrac{1}{3}$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^x$; $x_0 = \ln(3)$

(e) $f(x) = \ln(x)$; $x_0 = 5$

Analysis 4

Leite die Funktion f ab und vereinfache das Ergebnis.

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + x - 5$

(b) $f(x) = (2x+1)(3x-1)$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

(d) $f(x) = \ln(x) \cdot x^2$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$

(h) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

(i) $f(x) = (2x+3)^7$

(j) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(k) $f(x) = \sin x^2$

(l) $f(x) = (\sin x)^2$

(m) $f(x) = \ln(\ln(x))$

Analysis 5

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f\colon y = x^2 + x$ an der Stelle $x = 1$.

Analysis 6

Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graphen der Funktion $f\colon y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 4$.

Analysis 7

Welchen spitzen Winkel schliesst die Tangente des Graphen der Funktion $f\colon y = \mathrm{e}^x$ an der Stelle $x = 0.5$ mit der x-Achse ein?

Analysis 8

Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^3 + 4x^2 + x$ und $g(x) = x^2 - 6x + 11$ schneiden sich in einem Punkt. Berechne diesen Schnittpunkt und den spitzen Winkel, in dem sich die Graphen bzw. deren Tangenten dort schneiden.

Analysis 9

Bestimme den Definitionsbereich D der Funktion f.

(a) $f\colon y = x^3 + x^2 + x + 1$

(b) $f\colon y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^3}{x^2 - 7x + 12}$

(d) $f\colon y = \sqrt{x}$

(e) $f\colon y = \sqrt{x + 2}$

(f) $f\colon y = \mathrm{e}^x$

(g) $f\colon y = \ln x$

Analysis 10

Bestimme den Ordinatenabschnitt der Funktion f, sofern dieser existiert.

(a) $f\colon y = 2x - 7$

(b) $f\colon y = x^3 - 2x^2 - 3x$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

(d) $f\colon y = \ln x$

(e) $f\colon y = \mathrm{e}^x$

(f) $f\colon y = \sqrt{4 - x^2}$

Analysis 11

Bestimme allfällige Nullstellen der Funktion f möglichst ohne Taschenrechner.

(a) $f\colon y = 2x - 7$

(b) $f\colon y = x^3 - 2x^2 - 3x$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

(d) $f\colon y = \ln x$

(e) $f\colon y = \mathrm{e}^x$

(f) $f\colon y = \sqrt{4 - x^2}$

Analysis 12

Untersuche die Funktion f auf eine allfällige Symmetrie ihres Graphen G_f. Liegt eine Symmetrie vor, so ist diese nachzuweisen.

(a) $f\colon y = 2x^5 - 4x^3$

(b) $f\colon y = x^2 + 6x + 8$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^3 + x}{x}$

Analysis 13

Bestimme alle Asymptoten der Funktion f.

(a) $f\colon y = 3x + \dfrac{1}{x - 1}$

(b) $f\colon y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 9}$

(c) $f\colon y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x - 2}$

(d) $f\colon y = \dfrac{x - 7}{x^2 + 1}$

Analysis 14

Bestimme alle Extrempunkte der Funktion $f\colon y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Analysis 15

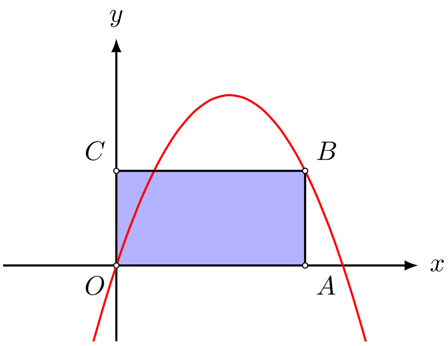
Bestimme alle Wendepunkte der Funktion $f\colon y = x^4 - 6x^2$

Analysis 16

Bestimme den Wendepunkt der Funktion $f\colon y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$. Handelt es sich um einen speziellen Wendepunkt?

Analysis 17

Der Punkt B liegt im 1. Quadranten auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 3x - x^2$. Für welche Wahl von B ist der Flächeninhalt des achsenparallelen Rechtecks $OABC$ maximal?



Analysis 18

Bestimme die Gleichung einer Parabel 3. Ordnung, welche die x-Achse an der Stelle $x = 2$ berührt und im Punkt $W(0, 4)$ einen Wendepunkt hat.

Analysis 19

Für welchen Wert von a schneiden sich die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 + ax + 1$ und $g(x) = 2x + a$ an der Stelle $x = 3$?

Analysis 20

Für welchen Wert von a berühren sich die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 + ax + b$ und $g(x) = bx + 2$ an der Stelle $x = 1$?

Analysis 21

Bestimme den Inhalt der endlichen Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ eingeschlossen ist.

Analysis 22

Berechne den Inhalt des von den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 - x + 1$ und $g(x) = x + 4$ eingeschlossenen endlichen Flächenstücks.

Analysis 23

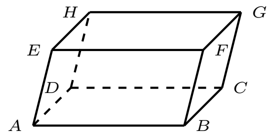
Der im ersten Quadranten liegende Teil der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 4 - x^2$ wird um die x-Achse gedreht. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers.

Analysis 24

Die zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ und $g(x) = 3 - x$ liegende Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers.

Vektorgeometrie 1

Gegeben sind die Ecken $A(-2,3,1)$, $B(4,5,7)$, $D(-1,4,2)$ und $E(6,2,10)$ eines Spats. Bestimme die Koordinaten der übrigen Ecken C, F, G und H.



Vektorgeometrie 2

Bestimme den Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten $A(-2,3,1)$ und $B(4,5,7)$.

Vektorgeometrie 3

Untersuche, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Vektorgeometrie 4

Berechne die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie 5

Berechne den Abstand der Punkte $A(11,-1,9)$ und $B(2,1,3)$.

Vektorgeometrie 6

Berechne $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie 7

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Vektorgeometrie 8

Berechne den spitzen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie 9

Berechne den Winkel β im Dreieck mit den Ecken $A(2,4,-1)$, $B(1,1,1)$ und $C(3,2,5)$.

Vektorgeometrie 10

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit $A(-2,1,3)$, $B(3,5,6)$ und $C(-1,5,2)$.

Vektorgeometrie 11

Berechne das Volumen des Spats, der durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Vektorgeometrie 12

Berechne das Volumen des Tetraeders mit den Ecken $A(1,0,2)$, $B(2,3,4)$, $C(3,2,5)$ und $D(4,4,6)$.

Vektorgeometrie 13

Stelle eine Gleichung der Geraden durch die Punkte $A(3,-2,5)$ und $B(4,1,7)$ auf.

Vektorgeometrie 14

Liegt der Punkt $P(13,1,-10)$ auf der Geraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Vektorgeometrie 15

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(7,6,3)$ geht und parallel zur Geraden $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Vektorgeometrie 16

Bestimme den 1. und 2. Spurpunkt der Geraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie 17

Bestimme den Abstand des Punktes $P(0,3,7)$ von der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektorgeometrie 18

Zeige, dass sich die Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne den Schnittpunkt sowie den spitzen Schnittwinkel.

Vektorgeometrie 19

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die Punkte $A(9,-3,-1)$, $B(5,0,1)$ und $C(2,6,7)$ definiert wird.

Vektorgeometrie 20

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt $P(-1,3,5)$ und die Gerade $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmt wird.

Vektorgeometrie 21

Untersuche, ob der Punkt $P(9,5,-1)$ in der Ebene $\varepsilon\colon 2x - 3y + 4z + 1 = 0$ liegt.

Vektorgeometrie 22

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ, die parallel zur Ebene $\varepsilon\colon 3x + 7y + z - 2 = 0$ liegt und durch den Punkt $P(4,4,4)$ geht.

Vektorgeometrie 23

Berechne den Abstand des Punktes $P(1,2,3)$ von der Ebene $\varepsilon\colon 9x + 12y + 20z + 15 = 0$.

Vektorgeometrie 24

Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene $\varepsilon\colon 3x - y + 2z + 12 = 0$

Vektorgeometrie 25

Berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel der Geraden

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der Ebene $\varepsilon\colon 3x - y + 4z - 15 = 0$.

Vektorgeometrie 26

Spiegle den Punkt $P(5, -2, 1)$ an der Ebene $\varepsilon\colon x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Vektorgeometrie 27

Zeige, dass sich die beiden Ebenen $\varepsilon\colon 3x + 2y + z + 5 = 0$ und $\delta\colon 2x + y + 2z + 4 = 0$ schneiden, indem du eine Gleichung der Schnittgeraden s bestimmst.

Stochastik 1

Berechne das arithmetische Mittel, die Standardabweichung und den Median der Stichprobenwerte:

$x_1 = 5.2$, $x_2 = 3.2$, $x_3 = 5.8$, $x_4 = 5.3$, $x_5 = 3.0$

Stochastik 2

Ein fairer Spielwürfel wird zweimal nacheinander geworfen. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(a) P(die Augensumme beträgt 2)

(b) P(die Augensumme beträgt 3)

(c) P(beide Augenzahlen sind gleich)

(d) P(beide Augenzahlen sind verschieden)

(e) P(Mindestens ein Würfel hat eine Augenzahl grösser als 4)

(f) P(die Augensumme ist grösser als 8)

Stochastik 3

In einer Schachtel befinden sich 3 rote Kugeln, 2 grüne Kugeln und 1 blaue Kugel. Es werden nacheinander und ohne hinsehen zwei Kugeln gezogen und deren Farbe notiert. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(a) P(die Kugeln haben die Farben Rot und Grün)

(b) P(die Kugeln haben die Farben Rot oder Grün)

(c) P(mindestens eine Kugel ist grün)

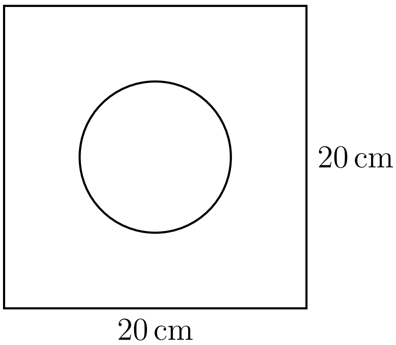
(d) P(die Kugeln haben die gleiche Farbe)

(e) P(die Kugeln haben verschiedene Farben)

(f) P(es wurde keine rote Kugel gezogen)

Stochastik 4

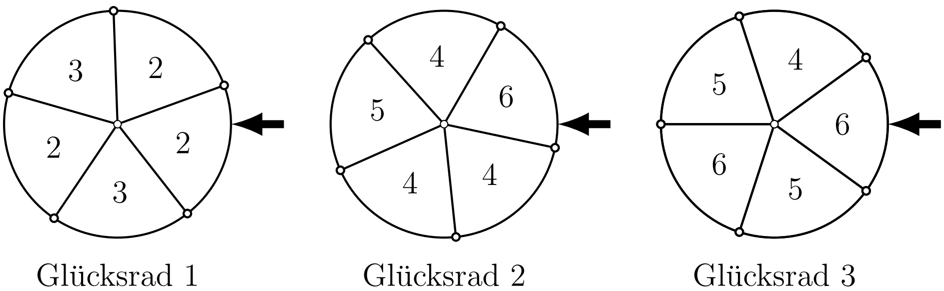
In der Mitte des Bodens einer Holzkiste mit quadratischer Grundfläche ($a = 20\,\text{cm}$) ist ein Kreis mit Radius $r = 5\text{cm}$ eingezeichnet.



In diese Kisten wird eine Münze mit dem Durchmesser $d = 2\,\text{cm}$ geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt sie ganz im Innern des Kreises zur Ruhe? (Die Breite der Kreislinie kann vernachlässigt werden.)

Stochastik 5

Ein Zufallsexperiment mit drei Glücksrädern mit je 5 Sektoren funktioniert wie folgt: Zuerst wird das Glücksrad 1 gedreht. Die beim Stillstand angezeigte Zahl bestimmt das Glücksrad, welches als nächstes gedreht werden soll. Dann wird dieses Glücksrad gedreht und die nach dem Stillstand angezeigte Zahl ist das Ergebnis.



(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis des Versuchs die Zahl 5 ist.

(b) Das Ergebnis ist die Zahl 4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht sie auf Glücksrad 2?

Stochastik 6

Jeder Buchstabe des Wortes ABSURD wird auf eine Karte geschrieben. Wie viele Wörter (auch sinnlose) lassen sich so bilden?

Stochastik 7

Jeder Buchstabe des Wortes EIGENSINNIG wird auf eine Karte geschrieben. Wie viele Wörter (auch sinnlose) lassen sich so bilden?

Stochastik 8

Zur Ermittlung des Siegers eines Fussballmatchs müssen 5 Elfmeter auf das gegnerische Tor ausgeführt werden. Auf wie viele Arten können die 10 Feldspieler diese 5 Torschüsse ausführen, wenn

(a) jeder Spieler höchstens einmal schiessen darf,

(b) ein Spieler auch mehrmals schiessen darf?

Stochastik 9

Aus einer Schulklasse mit 7 Schülerinnen und 8 Schülern soll eine vierköpfige Delegation gebildet werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich ...

(a) wenn es keine Einschränkungen bezüglich der Geschlechterzusammensetzung gibt,

(b) wenn von jedem Geschlecht mindestens eine Person in der Delegation sein muss?

Stochastik 10

Unter 5 Kindern sollen 17 gleich aussehende Kekse verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür,

(a) wenn es keine Einschränkungen bei der Verteilung gibt,

(b) wenn jedes Kind mindestens 3 Kekse erhalten soll?

Stochastik 11

In einem Reagal befinden sich 45 Musik-CDs, die zu den folgenden Genres gehören:

Genre	Pop	Jazz	Country	Klassik
Anzahl	20	12	5	8

Auf wie viele Arten lassen sich die CDs im Regal anordnen, wenn die zum gleichen Genre gehörenden CDs jeweils nebeneinander stehen sollen?

Stochastik 12

Die sechs Flächen eines fairen Spielwürfels erhalten eine alternative Beschriftung gemass folgendem Netz:

	2		
9	2	5	5
	2		

Der Würfel wird 24 Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei ...

(a) genau 12 Mal die Zahl 2 erscheint,

(b) höchstens 7 Mal die Zahl 5 erscheint,

(c) mindestens 3 Mal die Zahl 9 erscheint?

Die Zufallsvariable Y sei die Häufigkeit der Zahl 5 in 24 Würfen.

(d) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung von Y.

Nun wird der Würfel so lange geworfen, bis die Zahl 9 erscheint.

(e) Wie viele Würfe sind mindestens nötig, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal die Zahl 9 zu würfeln?

Stochastik 13

Jemand (die „Bank“ B) bietet folgendes Spiel an: Ein Spieler (S) wirft drei faire Münzen.

- Bei dreimal Zahl erhält S von B Fr. 5.–.
- Bei zweimal Zahl erhält S von B Fr. 3.–.
- Bei einmal Zahl erhält S von B Fr. 1.–.
- Bei dreimal Wappen erhält B von S Fr. 15.–.

(a) Bestimme den Erwartungswert aus der Sicht des Spielers.

(b) Wie muss der Betrag bei dreimal Wappen geändert werden, damit das Spiel fair ist?

Stochastik 14

Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 73$ und der Standardabweichung $\sigma = 4$. Bestimme die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(a) $P(X < 70)$

(b) $P(71 < X < 74)$

(c) $P(X > 72)$