

**Vektorgeometrie 1**

Was ist ein Vektor

eine Menge von Pfeilen mit gleicher Länge und gleicher Richtung

**Vektorgeometrie 2**

Wie wird ein einzelner Pfeil eines Vektors genannt?

ein Repräsentant

**Vektorgeometrie 3**

Was ist der Nullvektor  $\vec{0}$ ?

Der Nullvektor  $\vec{0}$  ist der Vektor mit der Länge 0 und unbestimmter Richtung.

Der Nullvektor ist das *neutrale Element* der Vektoraddition, denn für jeden beliebigen Vektor  $\vec{a}$  gilt:  
 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

**Vektorgeometrie 4**

Was ist der Gegenvektor eines Vektors  $\vec{a}$ ?

Der Gegenvektor  $-\vec{a}$  ist der Vektor mit derselben Länge aber entgegengesetzter Richtung wie  $\vec{a}$ .

Der Gegenvektor  $-\vec{a}$  ist das *inverse Element* von  $\vec{a}$ , denn es gilt  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .

**Vektorgeometrie 5**

Wie werden die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  addiert?

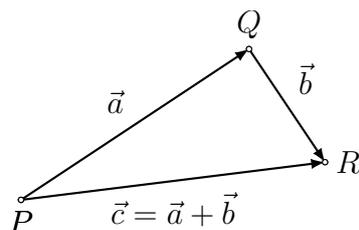
2

3

4

5

6



## Vektorgeometrie 6

Wie wird der Vektor  $\vec{b}$  vom Vektor  $\vec{a}$  subtrahiert?

Der Vektor  $\vec{b}$  wird vom Vektor vom  $\vec{a}$  subtrahiert, indem man den Gegenvektor  $-\vec{b}$  zu  $\vec{a}$  addiert.

$$\text{formal: } \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

## Vektorgeometrie 7

Wann sind zwei Vektoren *kollinear*?

Wenn beide Vektoren parallel zu einer Geraden sind.

## Vektorgeometrie 8

Wann sind drei Vektoren komplanar?

Wenn sie parallel zu einer Ebene sind.

## Vektorgeometrie 9

Wie ist die Komponentendarstellung von Vektoren im dreidimensionalen Raum definiert?

Sind  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ , und  $\vec{e}_3$  drei linear unabhängige (nicht komplanare) Vektoren im dreidimensionalen Raum, so lässt sich jeder Vektor  $\vec{a}$  eindeutig als Linearkombination der drei Basisvektoren darstellen:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Die drei skalaren Komponenten sind eindeutig bestimmt.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  wird Komponentendarstellung von  $\vec{a}$  genannt.

## Vektorgeometrie 10

Wie werden zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  in der Komponentendarstellung addiert bzw. subtrahiert?

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

## Vektorgeometrie 11

Wie wird der Vektor  $\vec{a}$  mit einer reellen Zahl  $k$  (Skalar) multipliziert?

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

### Vektorgeometrie 12

Welche Komponentendarstellung haben die Vektoren

$\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  und  $\vec{0}$ ?

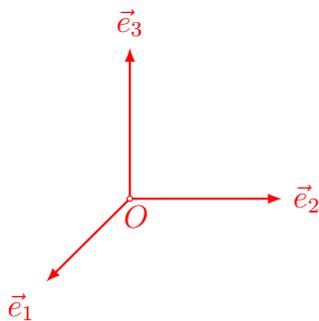
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Vektorgeometrie 13

Wie ist ein *kartesisches Koordinatensystem* im Raum definiert?

Ein kartesisches (rechtwinkliges) Koordinatensystem besteht aus einem Punkt  $O$  (Ursprung oder Origo) und drei orthonormierten Basisvektoren. Das sind drei Vektoren,  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ , und  $\vec{e}_3$ , die alle die Länge 1 haben und paarweise senkrecht aufeinander stehen.



### Vektorgeometrie 14

Was ist ein *Ortsvektor*?

Ein Ortsvektor ist derjenige Repräsentant eines Vektors, dessen Anfangspunkt sich im Ursprung  $O$  eines Koordinatensystems befindet.

### Vektorgeometrie 15

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Punkten und den Ortsvektoren in einem (kartesischen) Koordinatensystem?

Die Koordinaten eines Punktes  $P(x, y, z)$  sind gleich den Komponenten des zugehörigen Ortsvektors  $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

### Vektorgeometrie 16

Wie wird der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$  bestimmt?

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{r}_B + \vec{r}_A = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad (\text{„Endpunkt minus Anfangspunkt“})$$

### Vektorgeometrie 17

Wie wird der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $AB$  bestimmt?

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2} (\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

### Vektorgeometrie 18

Wie wird der Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks  $ABC$  bestimmt?

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3} (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$$

### Vektorgeometrie 19

Wie ist der Betrag  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a}$  in einem kartesischen Koordinatensystem definiert?

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

### Vektorgeometrie 20

Wie ist der Abstand  $AB$  zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  im Raum definiert?

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

### Vektorgeometrie 21

Wie ist das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  von zweie Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  definiert?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist.

## Vektorgeometrie 22

Wie kann das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  in der Komponentendarstellung berechnet werden, wenn eine orthonormierte Basis zugrunde liegt?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

## Vektorgeometrie 23

Welche Beziehung zwischen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  lässt sich mit dem Skalarprodukt untersuchen?

Zwei Vektoren  $\vec{a} \neq \vec{0}$  und  $\vec{b} \neq \vec{0}$  sind genau dann senkrecht zueinander, wenn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

## Vektorgeometrie 24

Wie kann der Winkel zwischen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  berechnet werden?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \right)$$

## Vektorgeometrie 25

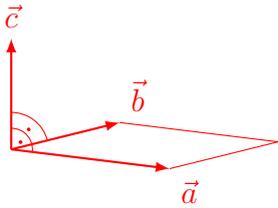
Wie wird das Vektorprodukt für die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  in der Komponentendarstellung berechnet?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente wird mit  $a_2 b_3 - a_3 b_2$  berechnet. In den folgenden Komponente werden die Indizes zyklisch vertauscht:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .

## Vektorgeometrie 26

Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ?



$\vec{c}$  steht sowohl senkrecht auf  $\vec{a}$  als auch senkrecht auf  $\vec{b}$ .

$|\vec{c}|$  ist gleich der Flächenmasszahl des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms.

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*: Wird  $\vec{a}$  auf dem kürzesten Weg in die Richtung von  $\vec{b}$  gedreht, dann findet diese Drehung von  $\vec{c}$  aus betrachtet im Gegen-uhreigersinn statt.

### Vektorgeometrie 27

Wie berechnet man den Flächeninhalt  $A$  des von den Vektoren  $\vec{a} \times \vec{b}$  begrenzten Parallelogramms?

$$(1) \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

### Vektorgeometrie 28

Wie berechnet man den Flächeninhalt  $A$  des von den Vektoren  $\vec{a} \times \vec{b}$  begrenzten Dreiecks?

$$(1) \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \frac{1}{2} |\vec{c}| = \frac{1}{2} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

### Vektorgeometrie 29

Wie kann man mit dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt) feststellen, ob zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  kollinear sind?

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann kollinear wenn  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  gilt.

*geometrische Begründung:* Zwei Vektoren sind genau dann kollinear wenn die von ihnen eingeschlossene Fläche den Inhalt 0 hat. Da dieser Flächeninhalt gerade dem Betrag des Kreuzprodukts  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  entspricht und dieser Betrag nur dann den Wert 0 hat, wenn alle Komponenten den Wert 0 haben, muss  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  gelten.

### Vektorgeometrie 30

Wie berechnet man das Volumen  $V$  des von den Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten Parallelogramms?

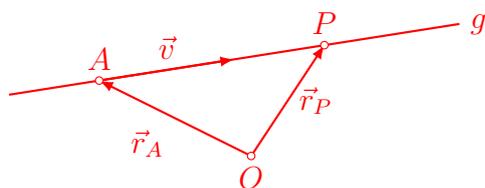
Über das Spatprodukt:  $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

$$(1) \vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) V = |\vec{u} \cdot \vec{c}| = |u_1 \cdot c_1 + u_2 \cdot c_2 + u_3 \cdot c_3|$$

### Vektorgeometrie 31

Welche Form hat die die Parametergleichung einer Geraden  $g$  im Raum?



$$g: \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$$

oder in Komponentenform:  $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$\vec{r}$  oder  $\vec{r}_P$ : Ortsvektor zum Punkt  $P$  auf der Geraden

$\vec{r}_A$ : Ortsvektor zu einem Anfangspunkt  $A$  auf der Geraden

$\vec{v}$ : Richtungsvektor der Geraden

### Vektorgeometrie 32

Welche Form haben die Spurpunkte einer Geraden  $g$  im Raum, sofern sie existieren?

1. Spurpunkt (Schnitt von  $g$  mit der  $xy$ -Ebene):  $S_1(x, y, 0)$

2. Spurpunkt (Schnitt von  $g$  mit der  $yz$ -Ebene):  $S_2(0, y, z)$

3. Spurpunkt (Schnitt von  $g$  mit der  $xz$ -Ebene):  $S_3(x, 0, z)$

### Vektorgeometrie 33

Beschreibe alle Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden  $g$  und  $h$  im Raum.

*identisch*: Richtungsvektoren kollinear, ein gemeinsamer Punkt

*parallel*: Richtungsvektoren kollinear, kein gemeinsamer Punkt

*schneidend*: Richtungsvektoren nicht kollinear, ein gemeinsamer Punkt

*windschief*: Richtungsvektoren nicht kollinear, kein gemeinsamer Punkt

### Vektorgeometrie 34

Wie bestimmt man den Schnittpunkt der sich schneidenden Geraden  $g$  und  $h$ ?

(1) Setze  $g: \vec{r} = \vec{r}_A + s \cdot \vec{u}$  und  $h: \vec{r} = \vec{r}_B + t \cdot \vec{v}$  gleich:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(2) Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 + u_1 s &= b_1 + v_1 t \\ a_2 + u_2 s &= b_2 + v_2 t \quad \Rightarrow \quad s = \dots \\ a_3 + u_3 s &= b_3 + v_3 t \quad \Rightarrow \quad t = \dots \end{aligned}$$

(3) Setze  $s$  in  $g$  oder  $t$  in  $h$  ein  $\Rightarrow S(x_S, y_S, z_S)$

### Vektorgeometrie 35

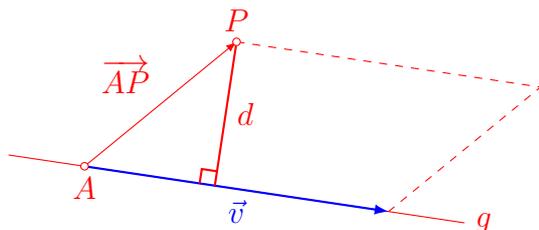
Wie berechnet man den spitzen Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden  $g$  und  $h$ ?

Berechne den spitzen Winkel zwischen den jeweiligen Richtungsvektoren  $u$  und  $v$ :

$$\varphi = \arccos \left( \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \right)$$

### Vektorgeometrie 36

Wie berechnet man den Abstand eines Punktes  $P$  von einer Geraden  $g$ ?



Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms auf zwei Arten:

$$d \cdot |\vec{v}| = \left| \vec{v} \times \overrightarrow{AP} \right| \quad \Rightarrow \quad d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

### Vektorgeometrie 37

Welche Form hat die Parametergleichung einer Ebene  $\varepsilon$  im Raum?

$$\varepsilon: \vec{r} = \vec{r}_A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

oder in Komponentenform:  $\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$\vec{r}$ : Ortsvektor zu einem Punkt auf der Ebene  $\varepsilon$

$\vec{r}_A$ : fester Punkt in der Ebene  $\varepsilon$

$\vec{u}, \vec{v}$ : Richtungsvektoren von  $\varepsilon$  (nicht kollinear)

### Vektorgeometrie 38

Welche Form hat die Koordinatengleichung einer Ebene  $\varepsilon$  im Raum?

$\varepsilon: ax + by + cz + d = 0$

$a, b, c$ : Komponenten eines zu  $\varepsilon$  senkrechten Vektors  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$d: d/|\vec{n}|$  ist der Abstand der Ebene vom Ursprung

$d$  wird bestimmt, indem man die Komponenten eines Normalenvektors  $\vec{n}$  und die Koordinaten eines Punkts  $P \in \varepsilon$  in die Gleichung einsetzt und nach  $d$  auflöst.

### Vektorgeometrie 39

Beschreibe alle gegenseitigen Lagen zweier Ebenen  $\varepsilon$  und  $\delta$  im Raum anhand der Koordinatengleichungen.

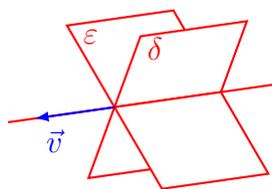
*identisch*:  $\vec{n}_\varepsilon$  und  $\vec{n}_\delta$  sind kollinear und es gilt  $\frac{d_\varepsilon}{|\vec{n}_\varepsilon|} = \frac{d_\delta}{|\vec{n}_\delta|}$

*parallel*:  $\vec{n}_\varepsilon$  und  $\vec{n}_\delta$  sind kollinear und es gilt  $\frac{d_\varepsilon}{|\vec{n}_\varepsilon|} \neq \frac{d_\delta}{|\vec{n}_\delta|}$

*schneidend*:  $\vec{n}_\varepsilon$  und  $\vec{n}_\delta$  sind nicht kollinear

### Vektorgeometrie 40

Wie bestimmt man die Schnittgerade  $g$  von zwei sich schneidenden Ebenen  $\varepsilon$  und  $\delta$ ?



Richtungsvektor von  $g$ :  $\vec{v} = \vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  ist Normalenvektor von Ebenen, die senkrecht auf  $\varepsilon$  und  $\delta$  stehen und  $\nu: v_1x + v_2y + v_3z = 0$  ist diejenige dieser Ebenen, welche durch den Ursprung geht.

Der Schnittpunkt von  $\varepsilon$ ,  $\mu$  und  $\nu$  ist ein Anfangspunkt  $A$  von  $g$ .

### Vektorgeometrie 41

Wie bestimmt man den spitzen Winkel  $\varphi$  zwischen zwei Ebenen  $\varepsilon$  und  $\delta$ ?

Wenn zwei Ebenen einen Winkel  $\varphi$  einschliessen, dann auch ihre Normalenvektoren  $\vec{n}_\varepsilon$  und  $\vec{n}_\delta$ . Daher:

$$\varphi = \arccos \left( \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|} \right)$$

### Vektorgeometrie 42

Wie bestimmt man den Abstand eines Punktes  $P$  von einer Ebene  $\varepsilon: ax + by + cz + d = 0$ ?

Mit der folgenden Formel:

$$\text{dist}(P, \varepsilon) = \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

für den Spezialfall  $O = (0, 0, 0)$  erhält man:

$$\text{dist}(O, \varepsilon) = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

### Vektorgeometrie 43

Wie untersucht man die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene  $\varepsilon: n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ ?

Setze  $x = a_1 + t \cdot v_1$ ,  $y = a_2 + t \cdot v_2$  und  $z = a_3 + t \cdot v_3$  in die Gleichung von  $\varepsilon$  ein und löse nach  $t$  auf.

- (1) Es gibt genau eine Lösung für  $t$ :  $g$  und  $\varepsilon$  schneiden sich.
- (2) Es gibt keine Lösung für  $t$ :  $g$  ist parallel zu  $\varepsilon$
- (3) Es gibt unendlich viele Lösungen für  $t$ :  $g$  ist Teilmenge von  $\varepsilon$

### Vektorgeometrie 44

Wie berechnet man den spitzen Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene  $\varepsilon: n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ ?

Berechne den (spitzen) Winkel zwischen  $\vec{v}$  und  $\vec{n}_\varepsilon$  mit der Zwischenwinkelformel und ergänze ihn auf  $90^\circ$ .

oder verwende die Formel zur direkten Berechnung:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|}\right)$$

## Vektorgeometrie 45

Welches Dokumentpaar hat die kleinste Dokumentdistanz?

$d_1 = \text{"DAS GIBT MIR VIEL"}$

$d_2 = \text{"DAS IST ZU VIEL"}$

$d_3 = \text{"ES GIBT VIEL"}$

Die Anführungs- und Schlusszeichen gehören nicht zum Dokument.

Wort	$\vec{d}_1$	$\vec{d}_2$	$\vec{d}_3$	
DAS	1	1	0	$\cos \angle(\vec{d}_1, \vec{d}_2) = \frac{2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
GIBT	1	0	1	
MIR	1	0	0	
VIEL	1	1	1	$\cos \angle(\vec{d}_2, \vec{d}_3) = \frac{1}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1/\sqrt{3}}{2}$
IST	0	1	0	
ZU	0	1	0	$\cos \angle(\vec{d}_3, \vec{d}_1) = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
ES	0	0	1	

$\vec{d}_1$  und  $\vec{d}_3$