Maturavorbereitung (Basics)

Vektorgeometrie

Vektorgeometrie 1

Was ist ein Vektor

Vektorgeometrie 1

Was ist ein Vektor

eine Menge von Pfeilen mit gleicher Länge und gleicher Richtung

Vektorgeometrie 2

Wie wird ein einzelner Pfeil eines Vektors genannt?

Vektorgeometrie 2

Wie wird ein einzelner Pfeil eines Vektors genannt?

ein Repräsentant

Vektorgeometrie 3

Was ist der Nullvektor $\vec{0}$?

Vektorgeometrie 3

Was ist der Nullvektor $\vec{0}$?

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist der Vektor mit der Länge 0 und unbestimmter Richtung.

Der Nullvektor ist das *neutrale Element* der Vektoraddition, denn für jeden beliebigen Vektor $\vec{a}$ gilt: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Vektorgeometrie 4

Was ist der Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$?

Vektorgeometrie 4

Was ist der Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$?

Der Gegenvektor $-\vec{a}$ ist der Vektor mit derselben Länge aber entgegengesetzter Richtung wie $\vec{a}$.

Der Gegenvektor $-\vec{a}$ ist das *inverse Element* von $\vec{a}$, denn es gilt $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Vektorgeometrie 5

Wie werden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert?

Vektorgeometrie 5

Wie werden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert?

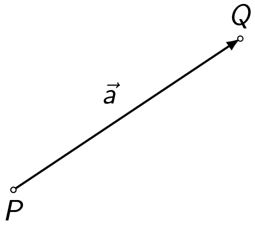
Wähle einen Punkt P.

Vektorgeometrie 5

Wie werden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert?

Wähle einen Punkt P.

Wähle einen Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$.



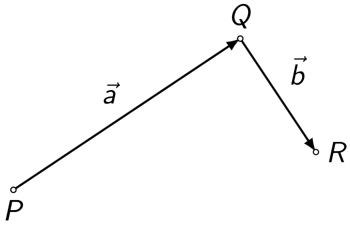
Vektorgeometrie 5

Wie werden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert?

Wähle einen Punkt P.

Wähle einen Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$.

Wähle einen Repräsentanten $\overrightarrow{QR}$ von $\vec{b}$.



Vektorgeometrie 5

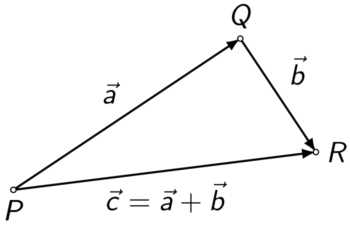
Wie werden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert?

Wähle einen Punkt P.

Wähle einen Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$.

Wähle einen Repräsentanten $\overrightarrow{QR}$ von $\vec{b}$.

Der Repräsentant $\overrightarrow{PR}$ ist ein Repräsentant der Summe $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Vektorgeometrie 5

Wie werden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert?

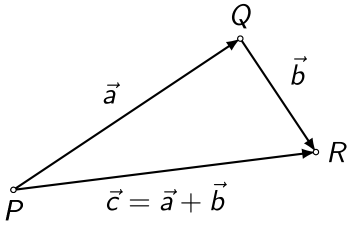
Wähle einen Punkt P.

Wähle einen Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$.

Wähle einen Repräsentanten $\overrightarrow{QR}$ von $\vec{b}$.

Der Repräsentant $\overrightarrow{PR}$ ist ein Repräsentant der Summe $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von P.



Vektorgeometrie 6

Wie wird der Vektor $\vec{b}$ vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert?

Vektorgeometrie 6

Wie wird der Vektor $\vec{b}$ vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert?

Der Vektor $\vec{b}$ wird vom Vektor vom $\vec{a}$ subtrahiert, indem man den Gegenvektor $-\vec{b}$ zu $\vec{a}$ addiert.

formal: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

Vektorgeometrie 7

Wann sind zwei Vektoren *kollinear*?

Vektorgeometrie 7

Wann sind zwei Vektoren *kollinear*?

Wenn beide Vektoren parallel zu einer Geraden sind.

Vektorgeometrie 8

Wann sind drei Vektoren komplanar?

Vektorgeometrie 8

Wann sind drei Vektoren komplanar?

Wenn sie parallel zu einer Ebene sind.

Vektorgeometrie 9

Wie ist die Komponentendarstellung von Vektoren im dreidimensionalen Raum definiert?

Vektorgeometrie 9

Wie ist die Komponentendarstellung von Vektoren im dreidimensionalen Raum definiert?

Sind $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, und $\vec{e}_3$ drei linear unabhängige (nicht komplanare) Vektoren im dreidimensionalen Raum, so lässt sich jeder Vektor $\vec{a}$ eindeutig als Linearkombination der drei Basisvektoren darstellen:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Die drei skalaren Komponenten sind eindeutig bestimmt.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ wird Komponentendarstellung von $\vec{a}$ genannt.

Vektorgeometrie 10

Wie werden zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Komponentendarstellung addiert bzw. subtrahiert?

Vektorgeometrie 10

Wie werden zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Komponentendarstellung addiert bzw. subtrahiert?

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 11

Wie wird der Vektor $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl k (Skalar) multipliziert?

Vektorgeometrie 11

Wie wird der Vektor $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl k (Skalar) multipliziert?

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 12

Welche Komponentendarstellung haben die Vektoren

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und $\vec{0}$?

Vektorgeometrie 12

Welche Komponentendarstellung haben die Vektoren

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und $\vec{0}$?

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 12

Welche Komponentendarstellung haben die Vektoren

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und $\vec{0}$?

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 12

Welche Komponentendarstellung haben die Vektoren

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und $\vec{0}$?

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 12

Welche Komponentendarstellung haben die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und $\vec{0}$?

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

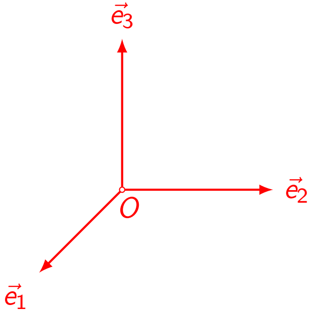
Vektorgeometrie 13

Wie ist ein *kartesisches Koordinatenystem* im Raum definiert?

Vektorgeometrie 13

Wie ist ein *kartesisches Koordinatenystem* im Raum definiert?

Ein kartesisches (rechtwinkliges) Koordinatensystem besteht aus einem Punkt O (Ursprung oder Origo) und drei orthonomierten Basisvektoren. Das sind drei Vektoren, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, und $\vec{e}_3$, die alle die Länge 1 haben und paarweise senkrecht aufeinander stehen.



Vektorgeometrie 14

Was ist ein *Ortsvektor*?

Vektorgeometrie 14

Was ist ein *Ortsvektor*?

Ein Ortsvektor ist derjenige Repräsentant eines Vektors, dessen Anfangspunkt sich im Ursprung O eines Koordinatensystems befindet.

Vektorgeometrie 15

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Punkten und den Ortsvektoren in einem (kartesischen) Koordinatensystem?

Vektorgeometrie 15

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Punkten und den Ortsvektoren in einem (kartesischen) Koordinatensystem?

Die Koordinaten eines Punktes $P(x, y, z)$ sind gleich den Komponenten des zugehörigen Ortsvektors $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie 16

Wie wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ vom Punkt A zum Punkt P bestimmt?

Vektorgeometrie 16

Wie wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ vom Punkt A zum Punkt P bestimmt?

$\overrightarrow{AB} = -\vec{r}_B + \vec{r}_A = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ („Endpunkt minus Anfangspunkt“)

Vektorgeometrie 17

Wie wird der Mittelpunkt M der Strecke AB bestimmt?

Vektorgeometrie 17

Wie wird der Mittelpunkt M der Strecke AB bestimmt?

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right)$$

Vektorgeometrie 18

Wie wird der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC bestimmt?

Vektorgeometrie 18

Wie wird der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC bestimmt?

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right)$$

Vektorgeometrie 19

Wie ist der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a}$ in einem kartesischen Koordinatensystem definiert?

Vektorgeometrie 19

Wie ist der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a}$ in einem kartesischen Koordinatensystem definiert?

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Vektorgeometrie 20

Wie ist der Abstand AB zwischen den Punkten A und B im Raum definiert?

Vektorgeometrie 20

Wie ist der Abstand AB zwischen den Punkten A und B im Raum definiert?

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Vektorgeometrie 21

Wie ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ von zweie Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert?

Vektorgeometrie 21

Wie ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ von zweie Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Vektorgeometrie 21

Wie ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ von zweie Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Vektorgeometrie 22

Wie kann das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ in der Komponentendarstellung berechnet werden, wenn eine orthonormierte Basis zugrunde liegt?

Vektorgeometrie 22

Wie kann das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ in der Komponentendarstellung berechnet werden, wenn eine orthonormierte Basis zugrunde liegt?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Vektorgeometrie 23

Welche Beziehung zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich mit dem Skalarprodukt untersuchen?

Vektorgeometrie 23

Welche Beziehung zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich mit dem Skalarprodukt untersuchen?

Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind genau dann senkrecht zueinander, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Vektorgeometrie 24

Wie kann der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet werden?

Vektorgeometrie 24

Wie kann der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet werden?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right)$$

Vektorgeometrie 25

Wie wird das Vektorprodukt für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Komponentendarstellung berechnet?

Vektorgeometrie 25

Wie wird das Vektorprodukt für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Komponentendarstellung berechnet?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 25

Wie wird das Vektorprodukt für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Komponentendarstellung berechnet?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

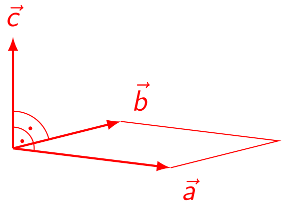
Die erste Komponente wird mit $a_2 b_3 - a_3 b_2$ berechnet. In den folgenden Komponente werden die Indizes zyklisch vertauscht: $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

Vektorgeometrie 26

Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

Vektorgeometrie 26

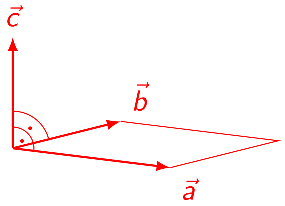
Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?



$\vec{c}$ steht sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch senkrecht auf $\vec{b}$.

Vektorgeometrie 26

Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

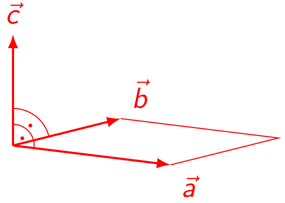


$\vec{c}$ steht sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch senkrecht auf $\vec{b}$.

$|\vec{c}|$ ist gleich der Flächenmasszahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Vektorgeometrie 26

Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?



$\vec{c}$ steht sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch senkrecht auf $\vec{b}$.

$|\vec{c}|$ ist gleich der Flächenmasszahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*: Wird $\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg in die Richtung von $\vec{b}$ gedreht, dann findet diese Drehung von $\vec{c}$ aus betrachtet im Gegenuhrzeigersinn statt.

Vektorgeometrie 27

Wie berechnet man den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ begrenzten Parallelogramms?

Vektorgeometrie 27

Wie berechnet man den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ begrenzten Parallelogramms?

$$(1)\ \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 27

Wie berechnet man den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ begrenzten Parallelogramms?

(1) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

(2) $A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$

Vektorgeometrie 28

Wie berechnet man den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ begrenzten Dreiecks?

Vektorgeometrie 28

Wie berechnet man den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ begrenzten Dreiecks?

$$(1)\ \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 28

Wie berechnet man den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ begrenzten Dreiecks?

(1) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \frac{1}{2} |\vec{c}| = \frac{1}{2} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$

Vektorgeometrie 29

Wie kann man mit dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt) feststellen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind?

Vektorgeometrie 29

Wie kann man mit dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt) feststellen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ gilt.

Vektorgeometrie 29

Wie kann man mit dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt) feststellen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ gilt.

geometrsiche Begründung: Zwei Vektoren sind genau dann kollinear wenn die von ihnen eingeschlossene Fläche den Inhalt 0 hat. Da dieser Flächeninhalt gerade dem Betrag des Kreuzprodukts $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht und dieser Betrag nur dann den Wert 0 hat, wenn alle Komponenten den Wert 0 haben, muss $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ gelten.

Vektorgeometrie 30

Wie berechnet man das Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms?

Vektorgeometrie 30

Wie berechnet man das Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms?

Über das Spatprodukt: $V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$

Vektorgeometrie 30

Wie berechnet man das Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms?

Über das Spatprodukt: $V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$

$$(1)\ \vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 30

Wie berechnet man das Volumen V des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms?

Über das Spatprodukt: $V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$

(1) $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

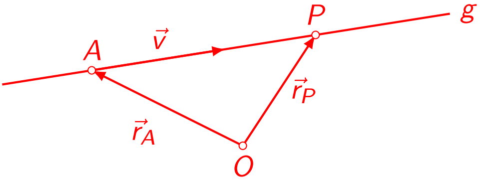
(2) $V = \left|\vec{u} \cdot \vec{c}\right| = \left|u_1 \cdot c_1 + u_2 \cdot c_2 + u_3 \cdot c_3\right|$

Vektorgeometrie 31

Welche Form hat die die Parmetergleichung einer Geraden g im Raum?

Vektorgeometrie 31

Welche Form hat die die Parmetergleichung einer Geraden g im Raum?



$g: \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$

oder in Komponentenform: $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$\vec{r}$ oder $\vec{r}_P$: Ortsvektor zum Punkt P auf der Geraden

$\vec{r}_A$: Ortsvektor zu einem Anfangspunkt A auf der Geraden

$\vec{v}$: Richtungsvektor der Geraden

Vektorgeometrie 32

Welche Form haben die Spurpunkte einer Geraden g im Raum, sofern sie existieren?

Vektorgeometrie 32

Welche Form haben die Spurpunkte einer Geraden g im Raum, sofern sie existieren?

1. Spurpunkt (Schnitt von g mit der xy-Ebene): $S_1(x, y, 0)$
2. Spurpunkt (Schnitt von g mit der yz-Ebene): $S_2(0, y, z)$
3. Spurpunkt (Schnitt von g mit der xz-Ebene): $S_3(x, 0, z)$

Vektorgeometrie 33

Beschreibe alle Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h im Raum.

Vektorgeometrie 33

Beschreibe alle Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h im Raum.

identisch: Richtungsvektoren kollinear , ein gemeinsamer Punkt

Vektorgeometrie 33

Beschreibe alle Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h im Raum.

identisch: Richtungsvektoren kollinear , ein gemeinsamer Punkt

parallel: Richtungsvektoren kollinear, kein gemeinsamer Punkt

Vektorgeometrie 33

Beschreibe alle Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h im Raum.

identisch: Richtungsvektoren kollinear , ein gemeinsamer Punkt

parallel: Richtungsvektoren kollinear, kein gemeinsamer Punkt

schneidend: Richtungsvektoren nicht kollinear, ein gemeinsamer Punkt

Vektorgeometrie 33

Beschreibe alle Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h im Raum.

identisch: Richtungsvektoren kollinear , ein gemeinsamer Punkt

parallel: Richtungsvektoren kollinear, kein gemeinsamer Punkt

schneidend: Richtungsvektoren nicht kollinear, ein gemeinsamer Punkt

windschief: Richtungsvektoren nicht kollinear, kein gemeinsamer Punkt

Vektorgeometrie 34

Wie bestimmt man den Schnittpunkt der sich schneidenen Geraden g und h?

Vektorgeometrie 34

Wie bestimmt man den Schnittpunkt der sich schneidenen Geraden g und h?

(1) Setze $g: \vec{r} = \vec{r}_A + s \cdot \vec{u}$ und h: $\vec{r} = \vec{r}_B + t \cdot \vec{v}$ gleich:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 34

Wie bestimmt man den Schnittpunkt der sich schneidenen Geraden g und h?

(1) Setze $g: \vec{r} = \vec{r}_A + s \cdot \vec{u}$ und h: $\vec{r} = \vec{r}_B + t \cdot \vec{v}$ gleich:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(2) Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 + u_1 s &= b_1 + v_1 t \\ a_2 + u_2 s &= b_2 + v_2 t \\ a_3 + u_3 s &= b_3 + v_3 t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s &= \ldots \\ t &= \ldots \end{aligned}$$

Vektorgeometrie 34

Wie bestimmt man den Schnittpunkt der sich schneidenen Geraden g und h?

(1) Setze $g: \vec{r} = \vec{r}_A + s \cdot \vec{u}$ und h: $\vec{r} = \vec{r}_B + t \cdot \vec{v}$ gleich:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(2) Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 + u_1 s &= b_1 + v_1 t \\ a_2 + u_2 s &= b_2 + v_2 t \\ a_3 + u_3 s &= b_3 + v_3 t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s &= \dots \\ t &= \dots \end{aligned}$$

(3) Setze s in g oder t in h ein $\quad \Rightarrow \quad S(x_S, y_S, z_S)$

Vektorgeometrie 35

Wie berechnet man den spitzen Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden g und h?

Vektorgeometrie 35

Wie berechnet man den spitzen Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden g und h?

Berechne den spitzen Winkel zwischen den jeweiligen Richtungsvektoren u und v:

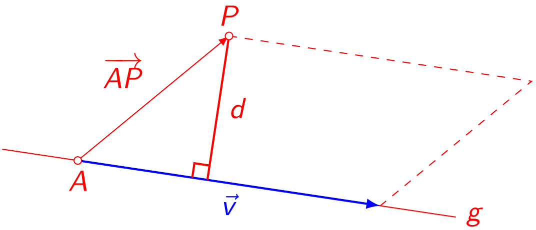
$$\varphi = \arccos\left(\frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\right)$$

Vektorgeometrie 36

Wie berechnet man den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g?

Vektorgeometrie 36

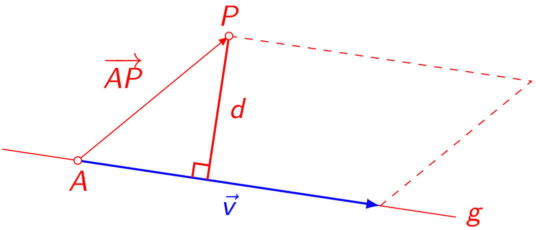
Wie berechnet man den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g?



Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms auf zwei Arten:

Vektorgeometrie 36

Wie berechnet man den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g?

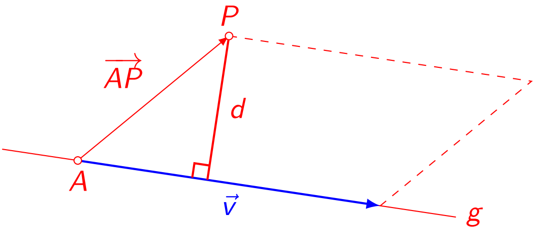


Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms auf zwei Arten:

$d \cdot |\vec{v}| =$

Vektorgeometrie 36

Wie berechnet man den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g?

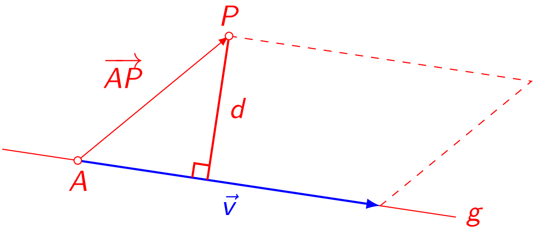


Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms auf zwei Arten:

$$d \cdot |\vec{v}| = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| \quad \Rightarrow \quad d =$$

Vektorgeometrie 36

Wie berechnet man den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g?



Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms auf zwei Arten:

$$d \cdot |\vec{v}| = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

Vektorgeometrie 37

Welche Form hat die Parametergleichung einer Ebene ε im Raum?

Vektorgeometrie 37

Welche Form hat die Parametergleichung einer Ebene ε im Raum?

$\varepsilon\colon \vec{r} = \vec{r}_A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

oder in Komponentenform: $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Vektorgeometrie 37

Welche Form hat die Parametergleichung einer Ebene ε im Raum?

$\varepsilon\colon \vec{r} = \vec{r}_A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

oder in Komponentenform: $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$\vec{r}$: Ortsvektor zu einem Punkt auf der Ebene ε

$\vec{r}_A$: fester Punkt in der Ebene ε

$\vec{u}$, $\vec{v}$: Richtungsvektoren von ε (nicht kollinear)

Vektorgeometrie 38

Welche Form hat die Koordinatengleichung einer Ebene ε im Raum?

Vektorgeometrie 38

Welche Form hat die Koordinatengleichung einer Ebene ε im Raum?

$\varepsilon\colon ax + by + cz + d = 0$

Vektorgeometrie 38

Welche Form hat die Koordinatengleichung einer Ebene ε im Raum?

ε: $ax + by + cz + d = 0$

a, b, c: Komponenten eines zu ε senkrechten Vektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Vektorgeometrie 38

Welche Form hat die Koordinatengleichung einer Ebene ε im Raum?

$\varepsilon : ax + by + cz + d = 0$

a, b, c: Komponenten eines zu ε senkrechten Vektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

d: $d/|\vec{n}|$ ist der Abstand der Ebene vom Ursprung

Vektorgeometrie 38

Welche Form hat die Koordinatengleichung einer Ebene ε im Raum?

ε: $ax + by + cz + d = 0$

a, b, c: Komponenten eines zu ε senkrechten Vektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

d: $d/|\vec{n}|$ ist der Abstand der Ebene vom Ursprung

d wird bestimmt, indem man die Komponenten eines Normalenvektors $\vec{n}$ und die Koordinaten eines Punkts $P \in \varepsilon$ in die Gleichung einsetzt und nach d auflöst.

Vektorgeometrie 39

Beschreibe alle gegenseitigen Lagen zweier Ebenen ε und δ im Raum anhand der Koordinatengleichungen.

Vektorgeometrie 39

Beschreibe alle gegenseitigen Lagen zweier Ebenen ε und δ im Raum anhand der Koordinatengleichungen.

identisch: $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$ sind kollinear und es gilt $\dfrac{d_\varepsilon}{|\vec{n}_\varepsilon|} = \dfrac{d_\delta}{|\vec{n}_\delta|}$

Vektorgeometrie 39

Beschreibe alle gegenseitigen Lagen zweier Ebenen ε und δ im Raum anhand der Koordinatengleichungen.

identisch: $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$ sind kollinear und es gilt $\dfrac{d_\varepsilon}{|\vec{n}_\varepsilon|} = \dfrac{d_\delta}{|\vec{n}_\delta|}$

parallel: $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$ sind kollinear und es gilt $\dfrac{d_\varepsilon}{|\vec{n}_\varepsilon|} \neq \dfrac{d_\delta}{|\vec{n}_\delta|}$

Vektorgeometrie 39

Beschreibe alle gegenseitigen Lagen zweier Ebenen ε und δ im Raum anhand der Koordinatengleichungen.

identisch: $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$ sind kollinear und es gilt $\dfrac{d_\varepsilon}{|\vec{n}_\varepsilon|} = \dfrac{d_\delta}{|\vec{n}_\delta|}$

parallel: $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$ sind kollinear und es gilt $\dfrac{d_\varepsilon}{|\vec{n}_\varepsilon|} \neq \dfrac{d_\delta}{|\vec{n}_\delta|}$

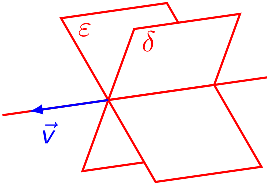
schneidend: $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$ sind nicht kollinear

Vektorgeometrie 40

Wie bestimmt man die Schnittgerade g von zwei sich schneidenden Ebenen ε und δ?

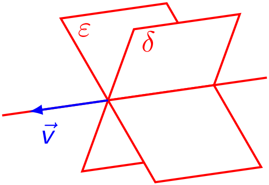
Vektorgeometrie 40

Wie bestimmt man die Schnittgerade g von zwei sich schneidenden Ebenen ε und δ?



Vektorgeometrie 40

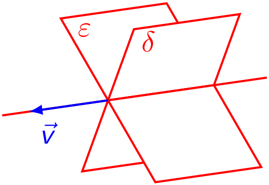
Wie bestimmt man die Schnittgerade g von zwei sich schneidenden Ebenen ε und δ?



Richtungsvektor von g: $\vec{v} = \vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta$

Vektorgeometrie 40

Wie bestimmt man die Schnittgerade g von zwei sich schneidenden Ebenen ε und δ?

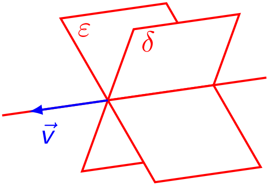


Richtungsvektor von g: $\vec{v} = \vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor von Ebenen, die senkrecht auf ε und δ stehen und ν: $v_1x + v_2y + v_3z = 0$ ist diejenige dieser Ebenen, welche durch den Ursprung geht.

Vektorgeometrie 40

Wie bestimmt man die Schnittgerade g von zwei sich schneidenden Ebenen ε und δ?



Richtungsvektor von g: $\vec{v} = \vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor von Ebenen, die senkrecht auf ε und δ stehen und ν: $v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0$ ist diejenige dieser Ebenen, welche durch den Ursprung geht.

Der Schnittpunkt von ε, μ und ν ist ein Anfangspunkt A von g.

Vektorgeometrie 41

Wie bestimmt man den spitzen Winkel φ zwischen zwei Ebenen ε und δ?

Vektorgeometrie 41

Wie bestimmt man den spitzen Winkel φ zwischen zwei Ebenen ε und δ?

Wenn zwei Ebenen einen Winkel φ einschliessen, dann auch ihre Normalenvektoren $\vec{n}_\varepsilon$ und $\vec{n}_\delta$. Daher:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|}\right)$$

Vektorgeometrie 42

Wie bestimmt man den Abstand eines Punktes P von einer Ebene $\varepsilon\colon ax + by + cz + d = 0$?

Vektorgeometrie 42

Wie bestimmt man den Abstand eines Punktes P von einer Ebene $\varepsilon\colon ax + by + cz + d = 0$?

Mit der folgenden Formel:

$$\operatorname{dist}(P, \varepsilon) = \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

für den Speziallfall $O = (0, 0, 0)$ erhält man:

$$\operatorname{dist}(O, \varepsilon) = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

Vektorgeometrie 43

Wie untersucht man die gegenseitige Lage der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene $\varepsilon\colon n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$?

Vektorgeometrie 43

Wie untersucht man die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene ε: $n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$?

Setze $x = a_1 + t \cdot v_1$, $y = a_2 + t \cdot v_2$ und $z = a_3 + t \cdot v_3$ in die Gleichung von ε ein und löse nach t auf.

Vektorgeometrie 43

Wie untersucht man die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene ε: $n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$?

Setze $x = a_1 + t \cdot v_1$, $y = a_2 + t \cdot v_2$ und $z = a_3 + t \cdot v_3$ in die Gleichung von ε ein und löse nach t auf.

(1) Es gibt genau eine Lösung für t: g und ε schneiden sich.

Vektorgeometrie 43

Wie untersucht man die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene ε: $n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$?

Setze $x = a_1 + t \cdot v_1$, $y = a_2 + t \cdot v_2$ und $z = a_3 + t \cdot v_3$ in die Gleichung von ε ein und löse nach t auf.

(1) Es gibt genau eine Lösung für t: g und ε schneiden sich.

(2) Es gibt keine Lösung für t: g ist parallel zu ε

Vektorgeometrie 43

Wie untersucht man die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene ε: $n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$?

Setze $x = a_1 + t \cdot v_1$, $y = a_2 + t \cdot v_2$ und $z = a_3 + t \cdot v_3$ in die Gleichung von ε ein und löse nach t auf.

(1) Es gibt genau eine Lösung für t: g und ε schneiden sich.

(2) Es gibt keine Lösung für t: g ist parallel zu ε

(3) Es gibt unendlich viele Lösungen für t: g ist Teilmenge von ε

Vektorgeometrie 44

Wie berechnet man den spitzen Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene $\varepsilon\colon\, n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$?

Vektorgeometrie 44

Wie berechnet man den spitzen Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und der Ebene $\varepsilon\colon n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$?

Berechne den (spitzen) Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{n}_\varepsilon$ mit der Zwischenwinkelformel und ergänze ihn auf 90°.

oder verwende die Formel zur direkten Berechnung:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|}\right)$$

Vektorgeometrie 45

Welches Dokumentpaar hat die kleinste Dokumentdistanz?

Vektorgeometrie 45

Welches Dokumentpaar hat die kleinste Dokumentdistanz?

$d_1 =$ `"DAS GIBT MIR VIEL"`

$d_2 =$ `"DAS IST ZU VIEL"`

$d_3 =$ `"ES GIBT VIEL"`

Die Anführungs- und Schlusszeichen gehören nicht zum Dokument.

Vektorgeometrie 45

Welches Dokumentpaar hat die kleinste Dokumentdistanz?

$d_1 =$ `"DAS GIBT MIR VIEL"`

$d_2 =$ `"DAS IST ZU VIEL"`

$d_3 =$ `"ES GIBT VIEL"`

Die Anführungs- und Schlusszeichen gehören nicht zum Dokument.

Wort	$\vec{d}_1$	$\vec{d}_2$	$\vec{d}_3$
DAS	1	1	0
GIBT	1	0	1
MIR	1	0	0
VIEL	1	1	1
IST	0	1	0
ZU	0	1	0
ES	0	0	1

$$\cos\angle(\vec{d}_1, \vec{d}_2) = \frac{2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\angle(\vec{d}_2, \vec{d}_3) = \frac{1}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1/\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\angle(\vec{d}_3, \vec{d}_1) = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\vec{d}_1$ und $\vec{d}_3$