

**Stochastik 1**

Was ist ein *Zufallsexperiment*?

Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, dessen Ausgang nicht vorhersehbar ist.

**Stochastik 2**

Was ist der *Stichprobenraum*  $\Omega$  eines Zufallsexperiments?

Der Stichprobenraum  $\Omega$  ist die Menge aller möglichen Ergebnisse  $\omega$  des Zufallsexperiments.

**Stochastik 3**

Was ist ein *Ereignis*  $E$  eines Zufallsexperiments?

Ein Ereignis  $E$  ist eine Teilmenge des Stichprobenraums  $\Omega$ .

oder: Ein Ereignis  $E$  ist eine Menge von Ergebnissen.

**Stochastik 4**

Wann tritt ein Ereignis  $E$  in einem Zufallsexperiment ein?

Das Ereignis  $E$  tritt (nicht) ein, wenn das Ergebnis  $\omega$  des Zufallsexperiments (nicht) in  $E$  liegt.

**Stochastik 5**

Was ist das *unmögliche Ereignis*?

Das unmögliche Ereignis ist  $E = \emptyset$  (die leere Menge).

**Stochastik 6**

Was ist das *sichere Ereignis*?

Das sichere Ereignis ist  $E = \Omega$ .

**Stochastik 7**

Was ist ein *Elementarereignis*?

Ein Elementarereignis ist ein Ereignis, das nur aus einem Ergebnis besteht; also  $E = \{\omega\}$ .

## Stochastik 8

Was ist das *Gegenereignis*  $\bar{E}$  zu einem Ereignis  $E$  in einem Stichprobenraum?

$$\bar{E} = \Omega \setminus E$$

## Stochastik 9

Wann sind zwei Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  *unvereinbar*?

$E_1$  und  $E_2$  sind unvereinbar, wenn  $E_1$  und  $E_2$  disjunkt sind; d. h. wenn  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  gilt.

## Stochastik 10

Es sei  $\Omega$  ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und  $P$  eine Funktion, die jedem Ereignis  $E \subset \Omega$  eine reelle Zahl  $P(E)$  zuordnet. Welche Eigenschaften muss  $P$  erfüllen, um eine *Wahrscheinlichkeitsfunktion* zu sein?

- $P(E) \geq 0$  für alle  $E \subset \Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$  für alle  $E_1, E_2 \subset \Omega$  mit  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

## Stochastik 11

Wie lautet der Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Sind  $E_1, E_2 \subset \Omega$ , so gilt:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

## Stochastik 12

Wie lautet die Laplace-Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Ist  $\Omega$  ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und haben alle Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit, so gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $E$ :

$$P(A) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl Elemente von } E}{\text{Anzahl Elemente von } \Omega} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$$

*Beachte:* Nicht jedes Zufallsexperiment hat gleich wahrscheinliche Ergebnisse.

## Stochastik 13

Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  definiert?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ mit } P(B) \neq 0$$

Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von  $A$  unter der Voraussetzung, dass  $B$  eingetroffen ist oder kürzer: Die Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $B$ .

#### Stochastik 14

Wie lautet der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

und wegen  $A \cap B$  gilt auch:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

#### Stochastik 15

Wann sind zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  *unabhängig*?

(kein Stoff der 6de an der mündlichen Matura 2022)

Die Ereignisse  $A$  und  $B$  heissen (stochastisch) unabhängig, wenn sie die Bedingung

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

erfüllen.

#### Stochastik 16

Was ist eine *Zufallsvariable*?

Eine Zufallsvariable  $X$  ist eine Funktion  $X$ , die jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  eine reelle Zahl  $x$  zuordnet.

Statt *Zufallsvariable* wird gelegentlich auch der Begriff *Zufallsgrösse* verwendet.

*Beispiele:*

- zweifacher Wurf eines Spielwürfels  $\rightarrow$  Augensumme
- $n$ -facher Münzwurf  $\rightarrow$  Anzahl „Wappen“
- zufällig ausgewählte Person  $\rightarrow$  Körpergrösse
- der kommende Tag an einem Ort  $\rightarrow$  Maximaltemperatur

#### Stochastik 17

Wie ist die *Verteilung* einer Zufallsvariable  $X$  definiert?

Die Verteilung einer Zufallsvariable  $X$  ist die Menge aller Paare

$$(x, P(X = x)),$$

wobei  $x$  eine Realisierung („konkreter Wert“) von  $X$  ist.

Bei endlich vielen Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  lässt sich die Verteilung tabellarisch darstellen:

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P(X = x)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

### Stochastik 18

Wie ist der *Erwartungswert*  $E(X)$  einer Zufallsvariable  $X$  mit endlich vielen Werten definiert?

Der Erwartungswert  $E(X)$  (oder  $\mu$ ) einer Zufallsvariable  $X$  mit endlich vielen Werten ist wie folgt definiert:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Interpretiert man die Werte der Zufallsvariablen  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  als Vektoren, so lässt sich der Erwartungswert als Skalarprodukt  $E(X) = \vec{x} \cdot \vec{p}$  darstellen.

### Stochastik 19

Wie ist die *Varianz*  $\text{Var}(X)$  einer Zufallsvariable  $X$  mit endlich vielen Werten definiert?

Ist  $\mu$  der Erwartungswert der Zufallsvariable  $X$ , so ist die Varianz  $\text{Var}(X)$  wie folgt definiert:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$$

Die Varianz ist die erwartete quadratische Abweichung der Zufallsvariablen  $X$  von ihrem Erwartungswert.

### Stochastik 20

Wie ist die Standardabweichung einer Zufallsvariable  $X$  definiert.

Ist  $\text{Var}(X) = \sigma^2$  die Varianz von  $X$  so ist

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

die Standardabweichung von  $X$ .

Die Standardabweichung ist die erwartete Abweichung der Zufallsvariablen  $X$  von ihrem Erwartungswert.

### Stochastik 21

Was ist eine *Bernoulli-Experiment*?

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ereignissen  $E$  und  $\bar{E}$  sowie den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $p$  und  $1 - p$ .

## Stochastik 22

Was ist eine *binomialverteilte* Zufallsvariable?

Wird ein Bernoulli-Experiment  $n$ -Mal nacheinander wiederholt, wobei die Wiederholungen unabhängig voneinander durchgeführt werden, so ist die Anzahl der Erfolge  $k$  eine binomialverteilte Zufallsvariable.

Die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Verteilung sind:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

## Stochastik 23

Ein Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  wird  $n$ -Mal unabhängig wiederholt. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat die zugehörige binomialverteilte Zufallsvariable?

$$E(X) = n \cdot p$$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$