Maturavorbereitung (Basics)

Stochastik

Stochastik 1

Was ist ein *Zufallsexperiment*?

Stochastik 1

Was ist ein *Zufallsexperiment*?

Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, dessen Ausgang nicht vorhersehbar ist.

Stochastik 2

Was ist der *Stichprobenraum* Ω eines Zufallsexperiments?

Stochastik 2

Was ist der *Stichprobenraum* Ω eines Zufallsexperiments?

Der Stichprobenraum Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse ω des Zufallsexperiments.

Stochastik 3

Was ist ein *Ereignis* E eines Zufallsexperiments?

Stochastik 3

Was ist ein *Ereignis* E eines Zufallsexperiments?

Ein Ereignis E ist eine Teilmenge des Stichprobenraums Ω.

oder: Ein Ereignis E ist eine Menge von Ergebnissen.

Stochastik 4

Wann tritt ein Ereignis E in einem Zufallsexperiment ein?

Stochastik 4

Wann tritt ein Ereignis E in einem Zufallsexperiment ein?

Das Ereignis E tritt (nicht) ein, wenn das Ergebnis ω des Zufallsexperiments (nicht) in E liegt.

Stochastik 5

Was ist das *unmögliche Ereignis*?

Stochastik 5

Was ist das *unmögliche Ereignis*?

Das unmögliche Ereignis ist $E = \emptyset$ (die leere Menge).

Stochastik 6

Was ist das *sichere Ereignis*?

Stochastik 6

Was ist das *sichere Ereignis*?

Das sichere Ereignis ist $E = \Omega$.

Stochastik 7

Was ist ein *Elementarereignis*?

Stochastik 7

Was ist ein *Elementarereignis*?

Ein Elementarereignis ist ein Ereignis, das nur aus einem Ergebnis besteht; also $E = \{\omega\}$.

Stochastik 8

Was ist das *Gegenereignis* $\overline{E}$ zu einem Ereignis E in einem Stichprobenraum?

Stochastik 8

Was ist das *Gegenereignis* $\overline{E}$ zu einem Ereignis E in einem Stichprobenraum?

$\overline{E} = \Omega \setminus E$

Stochastik 9

Wann sind zwei Ereignisse E_1 und E_2 *unvereinbar*?

Stochastik 9

Wann sind zwei Ereignisse E_1 und E_2 *unvereinbar*?

E_1 und E_2 sind unvereinbar, wenn E_1 und E_2 disjunkt sind;
d. h. wenn $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ gilt.

Stochastik 10

Es sei Ω ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und P eine Funktion, die jedem Ereignis $E \subset \Omega$ eine reelle Zahl $P(E)$ zuordnet. Welche Eigenschaften muss P erfüllen, um eine *Wahrscheinlichkeitsfunktion* zu sein?

Stochastik 10

Es sei Ω ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und P eine Funktion, die jedem Ereignis $E \subset \Omega$ eine reelle Zahl $P(E)$ zuordnet. Welche Eigenschaften muss P erfüllen, um eine *Wahrscheinlichkeitsfunktion* zu sein?

- $P(E) \geq 0$ für alle $E \subset \Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ für alle $E_1, E_2 \subset \Omega$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Stochastik 11

Wie lautet der Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Stochastik 11

Wie lautet der Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Sind E_1, $E_2 \subset \Omega$, so gilt:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Stochastik 12

Wie lautet die Laplace-Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Stochastik 12

Wie lautet die Laplace-Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Ist Ω ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und haben alle Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit, so gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E:

$$P(A) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl Elemente von } E}{\text{Anzahl Elemente von } \Omega} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$$

Beachte: Nicht jedes Zufallsexperiment hat gleich wahrscheinliche Ergebnisse.

Stochastik 13

Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ definiert?

Stochastik 13

Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ definiert?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ mit } P(B) \neq 0$$

Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von A unter der Voraussetzung, dass B eingetroffen ist oder kürzer: Die Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Stochastik 14

Wie lautet der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Stochastik 14

Wie lautet der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

und wegen $A \cap B$ gilt auch:

$$P(A \cap B) = P(B \cup A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Stochastik 15

Wann sind zwei Ereignisse A und B *unabhängig*?

(kein Stoff der 6de an der mündlichen Matura 2022)

Stochastik 15

Wann sind zwei Ereignisse A und B *unabhängig*?

(kein Stoff der 6de an der mündlichen Matura 2022)

Die Ereignisse A und B heissen (stochastisch) unabhängig, wenn sie die Bedingung

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

erfüllen.

Stochastik 16

Was ist eine *Zufallsvariable*?

Stochastik 16

Was ist eine *Zufallsvariable*?

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion X, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl x zuordnet.

Statt *Zufallsvariable* wird gelegentlich auch der Begriff *Zufallsgrösse* verwendet.

Beispiele:

- zweifacher Wurf eines Spielwürfels $\rightarrow$ Augensumme
- n-facher Münzwurf $\rightarrow$ Anzahl „Wappen“
- zufällig ausgwählte Person $\rightarrow$ Körpergrösse
- der kommende Tag an einem Ort $\rightarrow$ Maximaltemperatur

Stochastik 17

Wie ist die *Verteilung* einer Zufallsvariable X definiert?

Stochastik 17

Wie ist die *Verteilung* einer Zufallsvariable X definiert?

Die Verteilung einer Zufallsvariable X ist die Menge aller Paare

$$(x, P(X = x)),$$

wobei x eine Realisierung („konkreter Wert") von X ist.

Bei endlich vielen Werten x_1, x_2, ..., x_n lässt sich die Verteilung tabellarisch darstellen:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Stochastik 18

Wie ist der *Erwartungswert* $\mathrm{E}(X)$ einer Zufallsvariable X mit endlich vielen Werten definiert?

Stochastik 18

Wie ist der *Erwartungswert* $\mathrm{E}(X)$ einer Zufallsvariable X mit endlich vielen Werten definiert?

Der Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ (oder μ) einer Zufallsvariable X mit endlich vielen Werten ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Interpretiert man die Werte der Zufallsvariablen $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ als Vektoren, so lässst sich der Erwartungswert als Skalarprodukt $\mathrm{E}(X) = \vec{x} \cdot \vec{p}$ darstellen.

Stochastik 19

Wie ist die *Varianz* $\mathrm{Var}(X)$ einer Zufallsvariable X mit endlich vielen Werten definiert?

Stochastik 19

Wie ist die *Varianz* $\mathrm{Var}(X)$ einer Zufallsvariable X mit endlich vielen Werten definiert?

Ist μ der Erwartungswert der Zufallsvariable X, so ist die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ wie folgt definiert:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Die Varianz ist die erwartete quadratische Abweichung der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert.

Stochastik 20

Wie ist die Standardabweichung einer Zufallsvariable X definiert.

Stochastik 20

Wie ist die Standardabweichung einer Zufallsvariable X definiert.

Ist $\text{Var}(X) = \sigma^2$ die Varianz von X so ist

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

die Standardabweichung von X.

Die Standardabweichung ist die erwartete Abweichung der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert.

Stochastik 21

Was ist eine *Bernoulli-Experiment*?

Stochastik 21

Was ist eine *Bernoulli-Experiment*?

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ereignissen E und $\overline{E}$ sowie den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$.

Stochastik 22

Was ist eine *binomialverteilte* Zufallsvariable?

Stochastik 22

Was ist eine *binomialverteilte* Zufallsvariable?

Wird ein Bernoulli-Experiment n-Mal nacheinander wiederholt, wobei die Wiederholungen unabhängig voneinander durchgeführt werden, so ist die Anzahl der Erfolge k eine binomialverteilte Zufallsvariable.

Die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Verteilung sind:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Stochastik 23

Ein Bernoulli-Expermiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p wird n-Mal unabhängig wiederholt. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat die zugehörige binomialverteilte Zufallsvariable?

Stochastik 23

Ein Bernoulli-Expermiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p wird n-Mal unabhängig wiederholt. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat die zugehörige binomialverteilte Zufallsvariable?

$\mathrm{E}(X) = n \cdot p$

Stochastik 23

Ein Bernoulli-Expermiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p wird n-Mal unabhängig wiederholt. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat die zugehörige binomialverteilte Zufallsvariable?

$\mathrm{E}(X) = n \cdot p$

$\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$