Maturavorbereitung (Basics)

Kombinatorik

Kombinatorik 1

Wie lautet die Produktregel der Kombinatorik?

Kombinatorik 1

Wie lautet die Produktregel der Kombinatorik?

Sind A_1, A_2, ..., A_n endliche Mengen und wählt man aus jeder Menge ein Element aus, so gibt es es insgesamt

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

verschieden Auswahlmöglichkeiten, wobei $|A_i|$ die Anzahl Elemente der Menge A_i bezeichnet.

Kombinatorik 1

Wie lautet die Produktregel der Kombinatorik?

Sind A_1, A_2, ..., A_n endliche Mengen und wählt man aus jeder Menge ein Element aus, so gibt es es insgesamt

$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$

verschieden Auswahlmöglichkeiten, wobei $|A_i|$ die Anzahl Elemente der Menge A_i bezeichnet.

Beispiel: Mit

$|A_1| = 5$ verschiedenen T-Shirts,

$|A_2| = 4$ verschiedenen Paar Hosen und

$|A_3| = 2$ verschiedenen Paar Schuhen

lassen sich $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ verschiedene Outfits bilden.

Kombinatorik 2

Wie lautet die Summenregel der Kombinatorik?

Kombinatorik 2

Wie lautet die Summenregel der Kombinatorik?

Sind A_1, A_2, ..., A_n endliche Mengen, die jeweils alle paarweise disjunkt sind und wählt man aus irgend einer der Mengen genau ein Element aus, so gibt es

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

verschieden Auswahlmöglichkeiten, wobei $|A_i|$ die Anzahl Elemente der Menge A_i bezeichnet.

Kombinatorik 2

Wie lautet die Summenregel der Kombinatorik?

Sind A_1, A_2, ..., A_n endliche Mengen, die jeweils alle paarweise disjunkt sind und wählt man aus irgend einer der Mengen genau ein Element aus, so gibt es

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

verschieden Auswahlmöglichkeiten, wobei $|A_i|$ die Anzahl Elemente der Menge A_i bezeichnet.

Beispiel: In eine Bibliothek mit

$|A_1| = 300$ verschiedenen Krimis

$|A_2| = 400$ verschiedenen Romanen und

$|A_3| = 200$ verschiedenen Sachbüchern

kann man aus $300 + 400 + 200 = 900$ Büchern auswählen.

Kombinatorik 3

Wie lautet die Gleichheitsregel der Kombinatorik?

Kombinatorik 3

Wie lautet die Gleichheitsregel der Kombinatorik?

Sind A und B Mengen und gibt es eine Abbildung, die jedes Element von A eindeutig mit einem Element von B identifiziert und umgekehrt, dann haben A und B gleich viele Elemente ($|A| = |B|$).

Kombinatorik 3

Wie lautet die Gleichheitsregel der Kombinatorik?

Sind A und B Mengen und gibt es eine Abbildung, die jedes Element von A eindeutig mit einem Element von B identifiziert und umgekehrt, dann haben A und B gleich viele Elemente ($|A| = |B|$).

Beispiel:

A: Menge aller Teilmengen von $\{a, b, c, d\}$

B: Menge aller 0-1-Zahlenfolgen der Länge 4

Wählt man für die 4 Elemente die feste Reihenfolge a, b, c, d, so kann jede Teilmenge eindeutig mit einer 0-1-Zahlenfolge der Länge 4 identifiziert werden und umgekehrt:

$\{\,\} \leftrightarrow 0000$; $\{a, c, d\} \leftrightarrow 1011$; $\{a, b, c, d\} \leftrightarrow 1111$ usw.

Da es in B $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ binäre Zahlenfolgen der Länge 4 gibt, muss A ebenfalls 16 Elemente (also Teilmengen) haben.

Kombinatorik 4

Anzahl der Wörter der Länge k aus einer Menge von n Zeichen ohne Wiederholung von Zeichen.

Kombinatorik 4

Anzahl der Wörter der Länge k aus einer Menge von n Zeichen ohne Wiederholung von Zeichen.

Aus einer Menge von n Elementen sollen k Elemente ohne Wiederholungen auf k (nummerierte) Plätze verteilt werden:

Kombinatorik 4

Anzahl der Wörter der Länge k aus einer Menge von n Zeichen ohne Wiederholung von Zeichen.

Aus einer Menge von n Elementen sollen k Elemente ohne Wiederholungen auf k (nummerierte) Plätze verteilt werden:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinatorik 4

Anzahl der Wörter der Länge k aus einer Menge von n Zeichen ohne Wiederholung von Zeichen.

Aus einer Menge von n Elementen sollen k Elemente ohne Wiederholungen auf k (nummerierte) Plätze verteilt werden:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel: Mit den vier Buchstaben A, B, C, D können $4 \cdot 3 = 12$ Wörter der Länge 2 gebildet werden, in denen kein Zeichen mehrfach vorkommt:

AB AC AD

BA BC BD

CA CB CD

DA DB DC

Kombinatorik 5

Anzahl der Wörter der Länge k mit Zeichen aus einer Menge von n Elementen mit Wiederholungen.

Kombinatorik 5

Anzahl der Wörter der Länge k mit Zeichen aus einer Menge von n Elementen mit Wiederholungen.

Aus einer Menge von n Elementen sollen k Elemente mit Wiederholungen auf k (nummerierte) Plätze verteilt werden:

Kombinatorik 5

Anzahl der Wörter der Länge k mit Zeichen aus einer Menge von n Elementen mit Wiederholungen.

Aus einer Menge von n Elementen sollen k Elemente mit Wiederholungen auf k (nummerierte) Plätze verteilt werden:

n^k

Kombinatorik 5

Anzahl der Wörter der Länge k mit Zeichen aus einer Menge von n Elementen mit Wiederholungen.

Aus einer Menge von n Elementen sollen k Elemente mit Wiederholungen auf k (nummerierte) Plätze verteilt werden:

n^k

Beispiel: Mit den vier Buchstaben A, B, C, D können $4^2 = 16$ Wörter der Länge 2 gebildet werden, in denen ein Zeichen auch mehrfach auftreten darf:

AA AB AC AD

BA BB BC BD

CA CB CC CD

DA DB DC DD

Kombinatorik 6

Anzahl der Wörter der Länge n mit Zeichen aus einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung.

Kombinatorik 6

Anzahl der Wörter der Länge n mit Zeichen aus einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung.

Aus einer Menge von n Elementen sollen n Elemente ohne Wiederholungen auf n (nummerierte) Plätze verteilt werden:

Kombinatorik 6

Anzahl der Wörter der Länge n mit Zeichen aus einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung.

Aus einer Menge von n Elementen sollen n Elemente ohne Wiederholungen auf n (nummerierte) Plätze verteilt werden:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Kombinatorik 6

Anzahl der Wörter der Länge n mit Zeichen aus einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung.

Aus einer Menge von n Elementen sollen n Elemente ohne Wiederholungen auf n (nummerierte) Plätze verteilt werden:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Beispiel: Mit den drei Buchstaben A, B, C können $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Wörter der Länge 3 gebildet werden, in denen kein Zeichen mehrfach vorkommt:

ABC ACB

BAC BCA

CAB CBA

Kombinatorik 7

Anzahl der Wörter der Länge n mit k_1 Kopien von Zeichen 1, k_2 Kopien von Zeichen 2, $\ldots$, k_r Kopien von Zeichen r.

Kombinatorik 7

Anzahl der Wörter der Länge n mit k_1 Kopien von Zeichen 1, k_2 Kopien von Zeichen 2, ..., k_r Kopien von Zeichen r.

k_i Kopien von Zeichen 1
k_2 Kopien von Zeichen 2
...,
k_r Kopien von Zeichen r

sollen auf $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ Plätze verteilt werden:

Kombinatorik 7

Anzahl der Wörter der Länge n mit k_1 Kopien von Zeichen 1, k_2 Kopien von Zeichen 2, . . . , k_r Kopien von Zeichen r.

k_i Kopien von Zeichen 1
k_2 Kopien von Zeichen 2
. . . ,
k_r Kopien von Zeichen r

sollen auf $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ Plätze verteilt werden:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Kombinatorik 7

Anzahl der Wörter der Länge n mit k_1 Kopien von Zeichen 1, k_2 Kopien von Zeichen 2, ..., k_r Kopien von Zeichen r.

k_i Kopien von Zeichen 1
k_2 Kopien von Zeichen 2
$\ldots,$
k_r Kopien von Zeichen r

sollen auf $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ Plätze verteilt werden:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Beispiel: Mit zwei Buchstaben A und drei Buchstaben B können $5!/(3! \cdot 2!) = 10$ Wörter der Länge 5 gebildet werden:

$AABBB$ $ABABB$ $ABBAB$ $ABBBA$ $BAABB$

$BABAA$ $BABBA$ $BBAAB$ $BBABA$ $BBBAA$

Kombinatorik 8

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung von Elementen.

Kombinatorik 8

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung von Elementen.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man drei Buchstaben aus der Menge der Buchstaben A, B, C, D, E auswählen, ohne dass die Reihenfolge eine Bedeutung spielt?

Kombinatorik 8

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung von Elementen.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man drei Buchstaben aus der Menge der Buchstaben A, B, C, D, E auswählen, ohne dass die Reihenfolge eine Bedeutung spielt?

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Kombinatorik 8

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung von Elementen.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man drei Buchstaben aus der Menge der Buchstaben A, B, C, D, E auswählen, ohne dass die Reihenfolge eine Bedeutung spielt?

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE

Kombinatorik 9

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge von n Elementen mit Wiederholung von Elementen.

Kombinatorik 9

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge von n Elementen mit Wiederholung von Elementen.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man drei Buchstaben (wiederholt) aus der Menge der Buchstaben A, B, C auswählen, ohne dass die Reihenfolge wichtig ist?

Kombinatorik 9

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge von n Elementen mit Wiederholung von Elementen.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man drei Buchstaben (wiederholt) aus der Menge der Buchstaben A, B, C auswählen, ohne dass die Reihenfolge wichtig ist?

$$\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Kombinatorik 9

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge von n Elementen mit Wiederholung von Elementen.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man drei Buchstaben (wiederholt) aus der Menge der Buchstaben A, B, C auswählen, ohne dass die Reihenfolge wichtig ist?

$$\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

AAA, AAB, AAC, ABB, ACC, ABC, BBB, BBC, BCC, CCC

Die alphabetische Sortierung sorgt dafür, dass jeder Auswahl nur einmal gezählt wird.